

弹性介质波传问题的吸收边界条件*

梁 非

杨慧珠

(太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024) (清华大学工程力学系, 北京 100084)

提 要 本文通过合成一阶偏微分算子, 给出了弹性介质中波传问题的吸收边界条件; 为检验其吸收能力, 利用弹性波的势函数理论导出了 P 波和 S 波在吸收边界处的反射系数公式。文中给出的吸收条件形式简单, 且算例表明吸收效果和稳定性都很好。

关键词 弹性波, 吸收边界条件, 反射系数

一、引 言

工程中的许多波动问题, 其计算求解域往往很大, 有时甚至是无界的。但实际情况下, 我们总是在一个有限的区域内进行求解, 因此, 需要在所限定区域的边界上引入吸收边界条件, 从而最大限度地降低由于人为划定边界而造成反射波的强度。吸收边界的建立对弹性波的数值模拟起至关重要的作用, 它将直接影响到计算结果的稳定性和准确性^[1]。Engquist 等^[1-2]以及 Reynolds^[3]所建立和发展的标准二阶吸收边界已被工程上所广泛采用; 但由于这些条件从简单的声波方程导出, 与弹性波的实际情况还有较大误差, 它们只对入射角(波前与边界法向夹角)小于 15 的波有较强吸收能力, 而当波的入射角较大时, 仍将在所给边界处产生很强的反射。为此又有一些学者对其进行了改进, 并从弹性波动方程导出了相应的吸收边界条件^[4-6], 但由于这些条件形式复杂, 而且, 实施过程也较为繁琐, 因而很少被采用。

本文针对弹性波的吸收边界问题进行了进一步研究, 我们首先通过合成简单的一阶偏微分算子而直接构成吸收条件, 然后导出各种平面基本波型在此边界处的反射公式, 用以检

* 本文收稿日期: 1993年9月

验其吸收能力。实例表明, 本文给出的吸收边界条件在取两阶时, 即可达到令人满意的效果。

二、吸收条件的建立

本文通过对声波方程: $u_{tt} = c^2 \nabla^2 u$ 的吸收边界进行一般化处理, 进而将其推广于各向同性介质中弹性波的情况。讨论中, 令吸收边界在 $x = 0$ 处, 而 $x > 0$ 为波动方程的计算求解域 (其余处的吸收条件可由类似方法获得)。一个由 $x > 0$ 域以入射角 α , 波速 C 向外传播的二维平面波, 可用如下的形式来表达

$$f[(x, z) \cdot (\cos\alpha, \sin\alpha) + ct] = f(x \cos\alpha + z \sin\alpha + ct) \quad (1)$$

当如下的一个偏微分算子

$$(\cos\alpha) \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

作用于(1)式时, 结果为零, 所以取边界条件 $[(\cos\alpha) \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}]u = 0$, 则可完全吸收以 $\pm\alpha$ 角出射的平面波。Higdon^[7]指出可以做进一步推广而得到其更高阶的形式, 即最一般的声波吸收边界

$$\left\{ \prod_{j=1}^m [(\cos\alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}] \right\} u = 0, \quad x = 0 \quad (3)$$

上式对所有的 j , $\alpha_j < \frac{\pi}{2}$ 均成立。显然乘积形式的边界条件(3)可以同时对于入射角为 $\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \dots \pm \alpha_m$ 的波进行彻底吸收。当取(3)的二阶形式, 且令 $\alpha = \alpha_j = 0$ 时, 即可得到 Engquist 和 Majda^[2] 的标准二阶吸收边界。另外对于以任意角度 θ 出射的平面波, 易得其在吸收边界(3)处的反射系数公式为

$$R = \prod_{j=1}^m \frac{\cos\alpha_j - \cos\theta}{\cos\alpha_j + \cos\theta} \quad (4)$$

显然当 θ 角越接近于某一 α_j 时, (3) 的吸收效果就越好。

由于 SH 波可在弹性介质中独立存在, 其波传方程与声波方程相类似, 并只引起 y 方向的位移 v , 因此, 仿照(3), 我们可以建立如下形式 SH 波的吸收边界条件

$$\left\{ \prod_{j=1}^m [(\cos\alpha_j) \frac{\partial}{\partial t} - C_{SH} \frac{\partial}{\partial x}] \right\} v = 0, \quad x = 0 \quad (5)$$

这里 $C_{SH} = \frac{\mu}{\rho}$ 为 SH 波的速度, μ 是 Lamé 常数, ρ 代表介质的密度。

因 P 波和 SV 波相耦合, 所以 xz 平面内每个方向的位移 u 和 w , 均由这两种波型所共同引起, 为此, 应对吸收条件的微分算子(2)进行改进, 使新的算子

$$[(\cos\alpha_p) \frac{\partial}{\partial t} - C_p \frac{\partial}{\partial x}] [(\cos\alpha_{sv}) \frac{\partial}{\partial t} - C_{sv} \frac{\partial}{\partial x}] \quad (6)$$

分别作用于 u 和 w , 这里 C_p 和 C_{sv} 分别表示 P 波和 SV 波的波速

$$C_p = (\lambda + 2\mu) / \rho, \quad C_{SV} = C_{SH} = C_s$$

不难看出, (6) 中的第一项因子除了能完全吸收以 $\pm\alpha_0$ 角出射的 P 波外, 还可完全吸收沿 $\pm \cos^{-1}(\frac{C_s}{C_p} \cos\alpha)$ 方向的 SV 波; 而其第二项因子除了完全吸收以 $\pm\alpha_0$ 角出射的 SV 波外, 还可使 $\pm \cos^{-1}(\frac{C_p}{C_s} \cos\alpha)$ 方向的 P 波也得以全部吸收。因此, 经规一化处理后, 可仅用一种波速 “ C_p ” (或 “ C_s ”) 来表达吸收边界的微分算子, 从而获得以下在 $x = 0$ 处高阶形式的吸收边界条件

$$\left[\prod_{j=1}^m (A_j \frac{\partial}{\partial t} - C_p \frac{\partial}{\partial x}) \right] u = 0 \quad (7)$$

$$\left[\prod_{j=1}^m (B_j \frac{\partial}{\partial t} - C_p \frac{\partial}{\partial x}) \right] w = 0 \quad (8)$$

这里 $A_1, A_2 \dots A_m$ 及 $B_1, B_2 \dots B_m$ 为无量纲的正值常数。

显然对于所有的 j , 若 $A_j, B_j \leq 1$, 则(7)、(8)式将主要吸收 P 波, 但也可协助吸收 SV 波; 若 $A_j, B_j > 1$, 那么(7)、(8)式将主要吸收 SV 波, 但也可使部分 P 波得以吸收。使用时, 可根据实际情况来选择合适的 A_j 或 B_j 。

实际情况下, 常用吸收条件的二阶形式。若取 $A_1 = B_1 = 1$, $A_2 = B_2 = C_p / C_s$, 经化简后

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (C_s + C_p) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C_p C_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u = 0 \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (C_s + C_p) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C_p C_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] w = 0 \quad (10)$$

同样对于 SH 波, 我们取 $\alpha_0 = 0$, $\alpha = \pi/4$, 由(5)式也不难得到

$$\left[\frac{2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + \frac{2}{2}\right) C_s \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + C_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] v = 0 \quad (11)$$

三、反射系数的确定

为了检验吸收条件(9) ~ (11) 的有效性, 并对其吸收能力有个定量的估计, 需给出平面波在吸收边界处的反射系数公式。

如图 1, Φ 和 Ψ_3 分别表示入射 P 波和 SV 波的 Lamé 势函数, Φ 和 Ψ_4 分别表示反射 P 波和 SV 波的势函数。在吸收边界 $x = 0$ 处, 这些波的总和是

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi + \Phi = A_1 \Phi + A_2 \Phi \\ \Psi &= \Psi_3 + \Psi_4 = A_3 \Psi_3 + A_4 \Psi_4 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 A_1, A_2, A_3 和 A_4 是各平面波的幅值, 并且

$$\begin{aligned} \Phi &= \exp[ik_1(-l_1x + n_1z - C_p t)] \\ \Phi &= \exp[ik_2(l_2x + n_2z - C_p t)] \\ \Phi &= \exp[ik_3(-l_3x + n_3z - C_s t)] \\ \Phi &= \exp[ik_4(l_4x + n_4z - C_s t)] \end{aligned} \quad (13)$$

此处, $l_1 = \cos\alpha_1, n_1 = \sin\alpha_1, l_2 = \cos\alpha_2, n_2 = \sin\alpha_2, l_3 = \cos\beta_3, n_3 = \sin\beta_3, l_4 = \cos\beta_4, n_4 = \sin\beta_4, \alpha$ 和 β_3 是入射角, α_2 和 β_4 是反射角, 这些角均从 x 轴算起; k_1, k_2, k_3 和 k_4 为各个波的波数。由位移——势函数的关系^[8]

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (14)$$

可得

$$\begin{aligned} u &= i[-k_1 l_1 A_1 \Phi + k_2 l_2 A_2 \Phi - k_3 n_3 A_3 \Psi_3 - k_4 n_4 A_4 \Psi_4] \\ w &= i[k_1 n_1 A_1 \Phi + k_2 n_2 A_2 \Phi - k_3 l_3 A_3 \Psi_3 - k_4 l_4 A_4 \Psi_4] \end{aligned} \quad (15)$$

将(15)式代入到吸收条件(9)和(10)后可得

$$\begin{aligned} k_1^3 l_1 A_1 C_p^2 \Phi - k_2^3 l_2 A_2 C_p^2 \Phi + k_3^3 n_3 A_3 C_s^2 \Psi_3 + k_4^3 n_4 A_4 C_s^2 \Psi_4 \\ - (C_s + C_p)[k_1^3 l_1 A_1 C_p \Phi + k_2^3 l_2 A_2 C_p \Phi + k_3^3 l_3 n_3 A_3 C_s \Psi_3 - k_4^3 l_4 n_4 A_4 C_s \Psi_4] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} + C_p C_s [k_1^3 l_1 A_1 \Phi - k_2^3 l_2 A_2 \Phi + k_3^3 l_3 n_3 A_3 \Psi_3 + k_4^3 l_4 n_4 A_4 \Psi_4] = 0 \\ - k_1^3 n_1 A_1 C_p^2 \Phi - k_2^3 n_2 A_2 C_p^2 \Phi + k_3^3 l_3 A_3 C_s^2 \Psi_3 - k_4^3 l_4 A_4 C_s^2 \Psi_4 \\ - (C_p + C_s)[-k_1^3 l_1 n_1 A_1 C_p \Phi + k_2^3 l_2 n_2 A_2 C_p \Phi + k_3^3 l_3 A_3 C_s \Psi_3 + k_4^3 l_4 A_4 C_s \Psi_4] \end{aligned} \quad (17)$$

利用到吸收边界处 $x = 0$ 的条件, 并分别考虑 P 波与 SV 波单独入射两种情况, 经化简后获得下列结果

当 P 波单独入射时($A_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_2 = \alpha \\ \beta_4 &= \beta_3 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\alpha}{D}\right), D = \frac{1}{F} = C_p / C_s \end{aligned} \quad (18)$$

$$R_{pp}^0 = \frac{A_2}{A_1} = -\frac{K_1 N_1 + K_2 M_1}{M_1 N_2 + M_2 N_1} \quad (19)$$

$$R_{ps}^0 = \frac{A_4}{A_1} = \frac{K_1 N_2 - K_2 M_2}{M_1 N_2 + M_2 N_1} \quad (20)$$

当 SV 波单独入射时($A_1 = 0$)

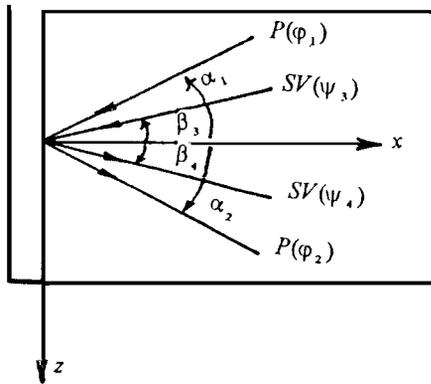


图 1 弹性波在吸收边界的反射

$$\beta_3 = \beta_4 = \beta$$

$$\alpha = \alpha = \sin^{-1}(D \sin \beta), D = \frac{1}{F} = C_p / C_s \quad (21)$$

$$R_{ssp}^0 = \frac{A_2}{A_3} = \frac{L_1 N_2 + L_2 M_2}{M_1 N_2 + M_2 N_1} \quad (22)$$

$$R_{ss}^0 = \frac{A_4}{A_3} = \frac{L_2 M_1 - L_1 N_1}{M_1 N_2 + M_2 N_1} \quad (23)$$

上述公式中的 R_{pp}^0 、 R_{ps}^0 、 R_{sp}^0 及 R_{ss}^0 代表各种平面波型在吸收边界处的反射系数, 其下标的第一个字母表示入射波型, 第二个字母表示反射波型。对于位移反射系数 R_{pp} 、 R_{ps} 、 R_{sp} 及 R_{ss} 可以通过对 u 或 w 的四个分量组成的适当比例而得到

$$R_{pp} = R_{pp}^0, R_{ps} = -DR_{ps}^0, R_{sp} = \frac{1}{D}R_{sp}^0, R_{ss} = -R_{ss}^0 \quad (24)$$

(18) ~ (24) 式中的有关参数为

$$\begin{aligned} M_1 &= F^3 \cos \alpha + (F^3 + F^4) \cos^2 \alpha + F^4 \cos^3 \alpha \\ M_2 &= F^2 \sin \beta + (F + F^2) \cos \beta \sin \beta + F \cos^2 \beta \sin \beta \\ N_1 &= F^3 \sin \alpha + (F^3 + F^4) \cos \alpha \sin \alpha + F^4 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ N_2 &= F^2 \cos \beta + (F + F^2) \cos^2 \beta + F \cos^3 \beta \\ K_1 &= F^3 \cos \alpha - (F^3 + F^4) \cos^2 \alpha + F^4 \cos^3 \alpha \\ K_2 &= F^3 \sin \alpha - (F^3 + F^4) \cos \alpha \sin \alpha + F^4 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ L_1 &= F^2 \sin \beta - (F + F^2) \cos \beta \sin \beta + F \cos^2 \beta \sin \beta \\ L_2 &= F^2 \cos \beta - (F + F^2) \cos^2 \beta + F \cos^3 \beta \end{aligned}$$

对于 SH 波, 仿照与前述相同的做法, 可获得以下的反射系数公式

$$R_0 = - \frac{2}{2} - \left(\frac{2}{2} + 1 \right) \cos \gamma + \cos^2 \gamma \quad (25)$$

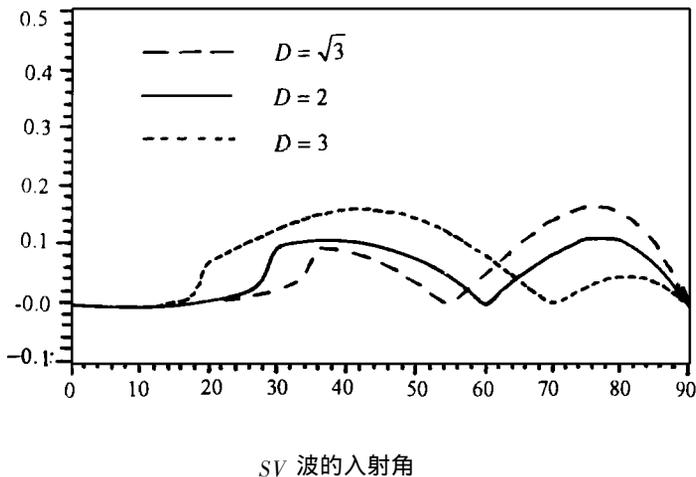
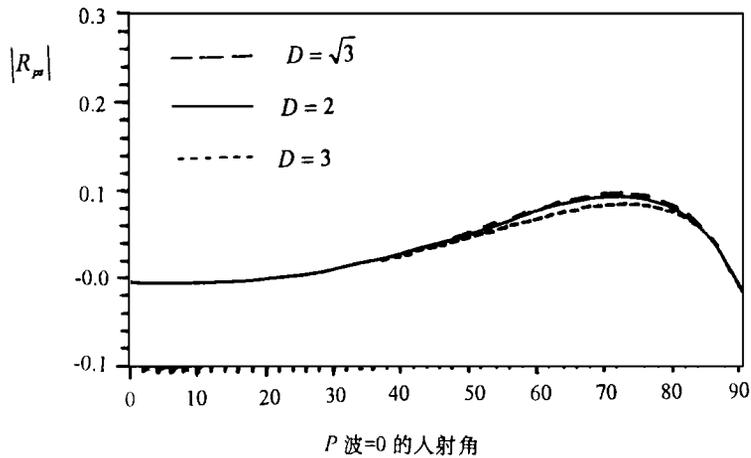
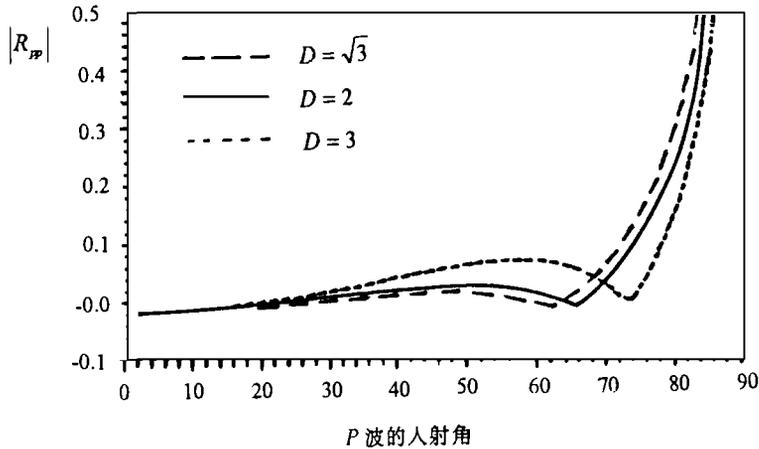
$$\frac{2}{2} + \left(\frac{2}{2} + 1 \right) \cos \gamma + \cos^2 \gamma$$

这里 γ 为 SH 波的入射角, 由于 (25) 中不含波速 C_s , 因此 SH 波的反射系数与介质情况无关。

四、实 例

为了检验本文给出的吸收条件对介质中弹性波的吸收效果, 我们分别考虑 $D = 3, 2, 3$ 的三种介质。图 2 给出了位移反射系数的绝对值随入射波入射角的变化规律。可见, 当波的入射角小于 70° 时, 本文给出的吸收边界具有很好的吸收效果, 吸收边界处反射波的能量不超过入射能量的 15%, 满足工程要求。另外, 在 D 的值较大时 (接近于 3), 吸收能力也未

表现出不稳定的现象。对于超过 70° 的高角度入射波, 本文的吸收效果则较差; 但所幸的是, 实际中, 吸收边界处的这些高角度入射波, 通常是经过多次反射以后才到达的, 其能量本身就变得非常微弱, 因此, 它们在吸收边界所产生的反射对计算域的影响也是可以忽略的。



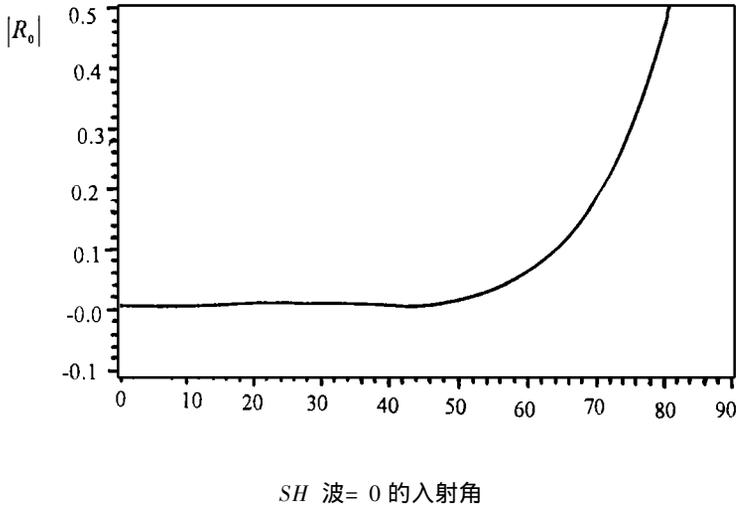
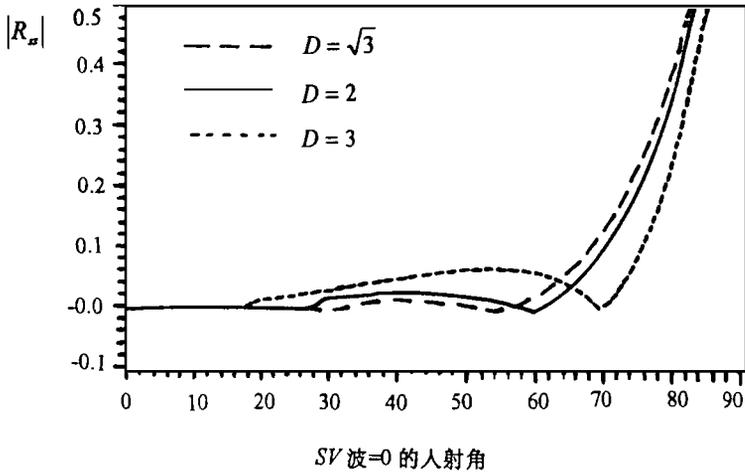


图 2 吸收边界处反射系数随入射角的变化规律

五、结 论

本文给出的吸收边界条件,形式简单,且经实例证明吸收效果良好,因而有推向实用的价值。另外文中建立吸收条件的方法具有普遍性,可应用于建立各向异性介质的吸收条件,关于这部分工作,将另文讨论。

参 考 文 献

- 1 Clayton R and Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, Bull Seis Soc Am, 1977; (67): 1529-1540

- 2 Engquist B and Majda A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math Comp*, 1977; (31): 629-651
- 3 Reynolds A C. Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems, *Geophysics*, 1978; (43): 1099-1110
- 4 Keys R G. Absorbing boundary conditions for acoustic media, *Geophysics*, 1985; (50): 892-902
- 5 Randall C J. Absorbing boundary condition for the elastic wave equation, *Geophysics*, 1988; (53): 611-624
- 6 Long L T and Liow J S. A transparent boundary for finite-difference wave simulation, *Geophysics*, 1990; (55): 201-208
- 7 Higdon R L. Radiation boundary conditions for elastic wave propagation, *SIAM J. Numerical Analysis*, 1990; (27): 831-870
- 8 杨桂通, 张善元. 弹性动力学. 中国铁道出版社, 北京: 1988

ABSORBING BOUNDARY CONDITIONS FOR ELASTIC WAVE PROPAGATION

Liang Fei Yang Huizhu

(Taiyuan University of Technology) (Tsinghua University)

Abstract In this paper, the absorbing boundary conditions for the problems of elastic wave propagation are constructed by composition of first-order partial differential operators. To test the absorbing ability, the reflection coefficient formulas on the absorbing boundaries are derived based on the potential functions theory of elastic wave. The simple form conditions given here have shown a good absorbing effect and stability by examples.

Key Words elastic wave, absorbing boundary conditions, reflection coefficients