

动载荷下应力强度因子的边界元计算

欧贵宝 朱加铭 饶意中 张正国

(哈尔滨船舶工程学院)

提 要 用 Nardini-Brebbia 边界元法计算了动载荷下的应力强度因子, 与解析解及有限元解相比较, 效果较好。最后对计算结果进行了分析讨论。

关键词 应力强度因子, 动载荷, 边界元法

一、引 言

动载荷下应力强度因子的计算受到人们普遍重视。由于数学上的困难, 获得其解析解受到了限制, 特别是带裂纹的有限体问题。因此, 人们采用各种数值计算方法, 如有限元法, 寻求其近似解。近些年来发展起来的边界元法由于数据准备、所需计算机内存及计算精度等方面具有明显的优点, 因而在许多领域获得应用。Nardini 和 Brebbia^[1]提出的一种解瞬态弹性动力问题的边界元法, 采用弹性静力学的基本解, 得到与有限元法相似的包括质量矩阵的方程, 可应用关于时间的逐步积分求解。本文应用该方法解动态断裂力学问题, 计算了在动载荷下的应力强度因子, 和有关解析解及有限元解比较, 说明了方法的有效性, 并对计算结果进行了分析讨论。

二、Nardini-Brebbia 法基本方程

不计体积力的弹性动力学方程和边界条件可写为

$$\sigma_{ij,j} - \rho u_i = 0 \quad \in \Omega \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i(t) & \in \Gamma_1 \\ p_i = \bar{p}_i(t) = \sigma_{ij}n_j & \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (2)$$

$(\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma)$

其中 Γ 为弹性域 Ω 的边界, σ_{ij} 、 p_i 、 u_i 、 $\bar{u}_i$ 分别为应力、面力、位移和加速度分量, $\bar{u}_i$ 、 $\bar{p}_i$ 为边界上给定的位移和面力, t 、 ρ 表示时间和密度, n_j 为边界外法线方向余弦。

以弹性静力学的基本解 U_{ki} 为权函数, 对 (1) 式进行加权处理有

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega - \rho \int_{\Omega} u_i U_{ki} d\Omega = 0 \quad (3)$$

应用 Somigliana 恒等式, (3) 式第一个区域积分可化为边界积分

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki}(p, q) d\Omega &= -C_{ki}(P) u_i(P) \\ &\quad - \int_{\Gamma} T_{ki}(P, Q) u_i(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ki}(P, Q) P_i(Q) d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $p, q \in \Omega$, $P, Q \in \Gamma$, T_{ki} 是与 U_{ki} 对应的面力, $C_{ki}(P)$ 是与边界点 P 的几何特性有关的常数。

$$\text{设 } u_i(p, t) = \alpha_i^j(t) f^j(p), \quad j = 1, 2, 3 \dots m \quad (5)$$

其中 $\alpha_i^j(t)$ 是与时间有关的未知量, $f^j(p)$ 是待选定的坐标函数, 则

$$u_i(p, t) = \ddot{\alpha}_i^j(t) f^j(p) \quad (6)$$

于是, (3) 式第二个区域积分可变为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i U_{ki} d\Omega &= \ddot{\alpha}_i^j(t) \int_{\Omega} f^j(p) U_{ki}(p, q) d\Omega \\ &= \ddot{\alpha}_i^j(t) \int_{\Omega} \delta_{ij} f^j(p) U_{ki}(p, q) d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

再设方程

$$\tau_{ij,m} + \delta_{ij} f^j = 0$$

的位移解为 ψ_{ij} , 对应的面力为 η_{ij} , 将上式代入 (7), 并考虑到 $\int_{\Omega} \tau_{ij,m} U_{ki} d\Omega$ 与 $\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} U_{ki} d\Omega$ 的相似性, 则可将前一积分类似地转化为边界积分, 故

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_i U_{ki} d\Omega &= -\ddot{\alpha}_i^j(t) \left\{ -C_{ki}(P) \psi_{ij}(P) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} U_{ki}(P, Q) \eta_{ij}(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ki}(P, Q) \psi_{ij}(Q) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

将 (4)、(8) 代入 (3), 则得到解瞬态动力问题的边界积分方程, 再离散处理可得如下方程组。

$$[H]\{u\} - [G]\{p\} + \rho([H][\psi] - [G][\eta])\{\ddot{\alpha}\} = 0 \quad (9)$$

由 (6) 式, 对所有 N 个离散节点

$$\{\ddot{u}\} = [F]\{\ddot{\alpha}\}$$

若选用的一组坐标函数 f^j 是线性独立的, 且个数等于节点数, 即 $m = N$, 则 $[F]$ 是正定方阵, 可求逆, 设

$$[E] = [F]^{-1}$$

$$\text{则} \quad \{\ddot{\alpha}\} = [E]\{u\} \quad (10)$$

(10) 代入 (9), 并令质量矩阵为

$$[M] = \rho([H][\psi] - [G][\eta])[E]$$

$$\text{则得} \quad [H]\{u\} + [M]\{u\} = [G]\{p\} \quad (11)$$

该方程组可采用逐步积分求解。

至于函数 f^j 可取某节点 A_j 到所有节点 Q 之间的距离, 即

$$f^j(Q) = R(A_j, Q)$$

此时, 对应的位移 ψ_{ii} 为 (平面应变)

$$\psi_{ii} = -\frac{R^3}{30G(1-\nu)} \left[\left(3 - \frac{10}{3}\nu \right) \delta_{ii} - \frac{\partial R}{\partial x_i} \frac{\partial R}{\partial x_i} \right] \quad (12)^*$$

三、动态应力强度因子计算

作者按上述方程采用线性单元编制了计算机程序, 该程序既可计算瞬态问题, 也能计算静力问题, 并且计算了受突加载荷和正弦分布 (半个波) 载荷的 I 型裂纹矩形板 (图 1) 的应力强度因子 K_I 。板材密度 $\rho = 2.45 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 剪切模量 $G = 2.94 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\nu = 0.292$ 。考虑对称性, 取 $1/4$ 板离散成 40 个单元, 40 个节点, 裂纹尖端单元长度为 $a/240$, 计算采用威尔逊- θ 法, 时间步长 Δt 为 $3 \mu\text{s}$ 。

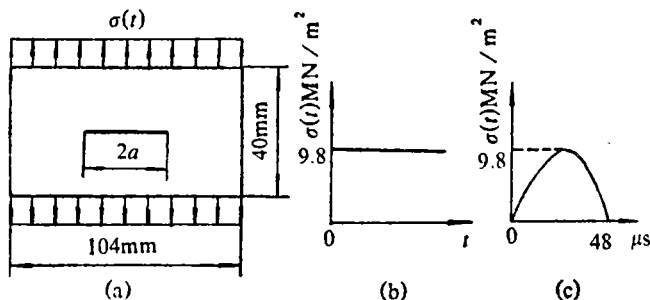


图 1 受拉伸载荷的 I 型裂纹矩形板

- a. 带裂纹的矩形板 b. 突加载荷 $\sigma(t) = 9.8 \text{ MN/m}^2$
c. 正弦分布载荷 $\sigma(t) = 9.8 \sin \frac{\pi}{48} t (\text{MN/m}^2)$

图 2 表示当裂纹长度 $2a = 24 \text{ mm}$ 并受突加载荷时, 无量纲应力强度因子 $K_I(t)/\sigma\sqrt{\pi a}$ 随时间的变化曲线。为了比较, 图中也表示了无限板的解析解和采用奇异单元的有限元解^[2]。同时, 将静载时有限元和边界元的结果也表示在纵坐标上, 都约等于 1.2。

图 3 表示了当裂纹长度 $2a$ 分别为 24 mm , 36 mm 和 48 mm 并受相同突加载荷时, 应力强度因子 $K_I(t)$ 随时间的变化曲线。而静载时的应力强度因子分别为 2.3 、 3.5 和 $4.9 \text{ MNm}^{-3/2}$ 。

图 4 表示当裂纹长度 $2a$ 分别为 24 mm 、 36 mm 和 48 mm 并受相同正弦分布载荷时, 应力强度因子 $K_I(t)$ 随时间的变化曲线。

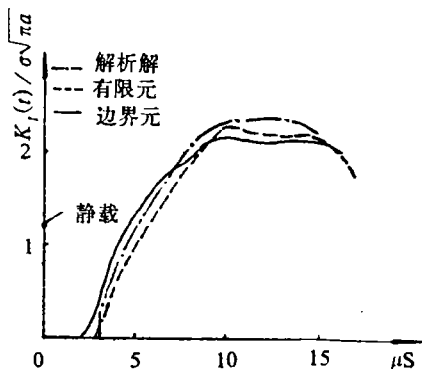


图 2 受突加载荷时 $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ 与时间的关系

* 文献[1]中此式缺一因子 $-1/G$, 可能有误, 顺便指出, 其 (36) 式也是错误的。

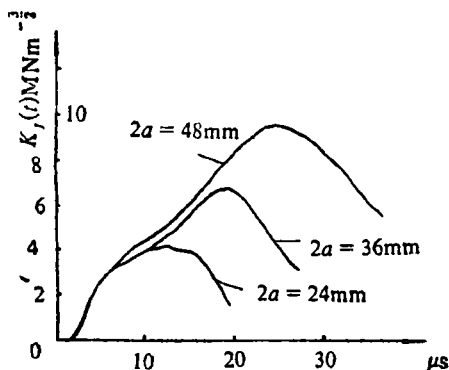


图 3 不同裂纹长度受突加载荷时 $K_I(t)$ 曲线

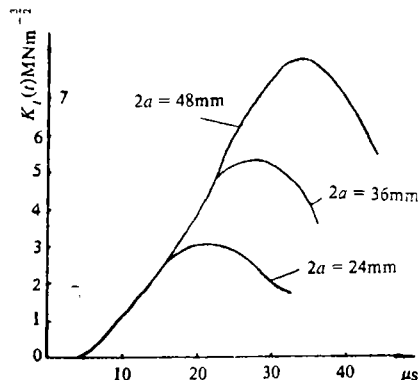


图 4 不同裂纹长度受正弦分布载荷时的 $K_I(t)$ 曲线

四、结果分析

由计算结果可见, 尽管我们采用的常规线性单元, 用 Nardini-Brebbia 边界元法计算动载荷下的应力强度因子仍然获得了较好的结果。然而从图 2 来看, 其精度似乎不如采用奇异元的有限元解。在裂纹尖端, 我们采用更小的单元试算, 效果也并不明显。因此, 为提高精度, 有必要采用奇异单元。

由图 3、图 4 可见, 在板的尺寸不变的情况下, 裂纹越长, 应力强度因子达到最大值所需时间也越长。而且由图 4 可知, $K_I(t)$ 到达最大值的时刻与最大载荷并不一致, 当载荷减少时, K_I 可仍然增加。因此, 由最大载荷确定裂纹扩展的时刻可能导致错误的结论。

参 考 文 献

- [1] Nardini D, Brebbia C A. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method in Boundary Element (Ed. Brebbia C. A.) 1983, pp. 917—930.
- [2] Aoki S, Kishimoto K, Kondo Hand Sakata M. Elastodynamic analysis of crack by finite element method using singular element. Int. J. Fracture, Vol.14, No.1, 1978, pp. 59—67.

COMPUTATION OF STRESS INTENSITY FACTORS UNDER DYNAMIC LOADINGS BY BOUNDARY ELEMENT METHOD

Ou Guibao Zhu Jiaming Rao Yizhong Zhang Zhengguo
(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Abstract The dynamic stress intensity factors under dynamic loadings are computed by Nardini-Brebbia Boundary Element Method. The comparison with the analytical solution and the solution of Finite Element Method shows that the method is effective. The results of computation are analysed and discussed as well.

Key words stress intensity factors, dynamic loadings, boundary element method.