

弹性地基板的无界边界元——有限元耦合算法^{*}

许金余 吴彰春 冷培义

(空军工程学院)

提 要 本文应用无界边界元-有限元耦合法对弹性地基上的薄板进行了计算。弹性薄板采用有限元离散,弹性半无限地基应用边界元离散,并应用无界边界元模拟半无限体表面的无限性,通过板与基础接触面位移和力的协调性(光滑接触),建立了弹性地基和板的综合算式。计算结果表明,本文方法具有工作量少、精度高等优点,非常适合于机场道面工程及其它基础工程。

关键词 无界边界元,有限元,弹性半空间,板

一、引 言

弹性地基及其上板的计算问题,是工程中常遇到的问题,比如道(路)面工程,工业与民用建筑的基础工程等。应用有限元法解决这类问题时,由于是半无限域的空间问题,必须人为地划定计算边界,并划分三维立体单元,计算工作量非常大。而边界元法则尤其适合于无限域和半无限域的计算问题。由于半无限域的基本解非常复杂而不易应用,通常都是采用无限域的基本解来计算。这样一来,尽管介质无限远处的边界条件能自动满足,但半平面上仍需进行离散。针对这一问题,一些学者提出了无界边界元的概念,用以模拟无限边界^{[1][2]}。目前多数是针对刚性基础或条形基础(可简化为平面问题)计算的^{[3][4]}。众所周知,机场道面板多是矩形的,且要考虑板本身的变形影响。本文就是在已有文献基础上^{[2][4][5]},充分利用 FEM 和 BEM 的优点,并利用无界边界元模拟无穷边界,应用无界元和有限元耦合法解算弹性半空间地基及其上的薄板,并在作者无限域计算程序 EPBP^[5]的基础上,扩展为 HIBFEP 程序,对几个典型问题进行了计算。

二、半无限介质的边界积分方程及其离散表述

1. 边界元矩阵方程的建立

由加权残值法可得半无限介质的边界积分方程(不计体力):

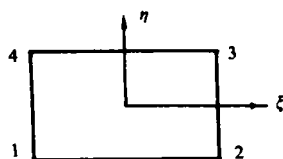
$$c_{ij}u_j(P) = - \int_S T_{ij}(P, Q)u_j(Q)dS(Q) + \int_S U_{ij}(P, Q)t_j(Q)ds(Q) \quad (2.1)$$

式中三维基本解为:

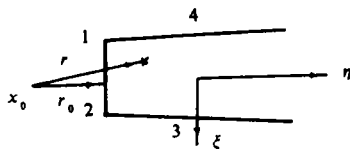
* 本文收稿日期:1993 年 4 月

$$T_{ij}(P, Q) = \frac{-1}{8\pi(1-\mu)r^2} \left\{ [(1-2\mu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\mu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\}$$

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{1}{16\pi(1-\mu)Gr} \{ (3-4\mu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \}$$



(a) 四边形边界元



(b) 无界边界单元

图 1

若采用四边形四节点边界元离散, 式(2.1)变为:

$$cu = \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^{k(e)} g_k^e t_k^e + \sum_{e=1}^E \sum_{k=1}^{k(e)} h_k^e u_k^e \quad (2.2)$$

$E = E_1 + E_2$ 为所划分边界元数(E_1)和无界元数(E_2)之和, $K(e)$ 为第 e 个单元的节

点数。对于光滑边界 $c = \frac{1}{2}I$

(1). 当 $e \in E_1$ 时

$$\begin{cases} x = \sum N_k(\xi, \eta) x_k^e \\ u = \sum N_k(\xi, \eta) u_k^e \\ t = \sum N_k(\xi, \eta) t_k^e \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} h_k^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T(P, Q) N_k(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \\ g_k^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(P, Q) N_k(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \end{cases} \quad (2.4)$$

$$N_k(\xi, \eta) = IN_k(\xi, \eta) \quad (2.5)$$

$$\text{形函数} \begin{cases} N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$I = \text{diag}(1, 1, 1)$$

(2). 当 $e \in E_2$ 时

$$\begin{cases} x = \sum M_k(\xi) M_k^\infty(\eta) x_k^e \\ u = \sum M_k(\xi) f_u(\eta) u_k^e \\ t = \sum M_k(\xi) f_t(\eta) t_k^e \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} h_k^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} T(P, Q) M_k(\xi) f_u(\eta) |J_1| d\xi d\eta \\ g_k^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} U(P, Q) M_k(\xi) f_t(\eta) |J| d\xi d\eta \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} M_1(\xi) = M_4(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ M_2(\xi) = M_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (2.9)$$

$$M_1^\infty(\eta) = M_2^\infty(\eta) = \eta_0, \quad M_3^\infty(\eta) = M_4^\infty(\eta) = \eta_0 + 1 \quad (2.10)$$

$$\eta_0 = \begin{cases} \eta & \text{当 } -1 \leq \eta < 0 \\ \eta/(1 - \eta) & \text{当 } 0 \leq \eta < 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$M_k(\xi) = IM_k(\xi)(M_k^\infty(\eta) \text{ 亦同})$$

衰减函数

$$\begin{cases} f_u = r_0/r \\ f_t = (r_0/r)^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

通常衰减中心取为坐标原点。

$$|J_1| = \frac{ds}{d(\xi, \eta_0)} \cdot \frac{d(\xi, \eta_0)}{d(\xi, \eta)} = \begin{cases} |J| & (-1 \leq \eta < 0) \\ |J| \frac{1}{(1 - \eta)^2} & (0 \leq \eta < 1) \end{cases} \quad (2.13)$$

式(2.2)最后形式为:

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (2.14)$$

$$[H] = [\hat{H}] + \frac{1}{2}[\delta_{ij}]$$

2. 边界矩阵方程的分块表述

将半无限表面分成 $S = S_c + S_f$ 两部分(c, f 分别表示与板相接触部分和自由部分), 将式(2.14)改写成分块形式:

$$\begin{bmatrix} [H_{cc}] & [H_{cf}] \\ [H_{fc}] & [H_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_c\} \\ \{u_f\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{cc}] & [G_{cf}] \\ [G_{fc}] & [G_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_c\} \\ \{t_f\} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

由于 $\{t_f\} = \{0\}$, 由式(2.15)得:

$$\{u_f\} = [H_{ff}]^{-1}[G_{fc}]\{t_c\} - [H_{ff}]^{-1}[H_{fc}]\{u_c\} \quad (2.16)$$

$$\{t_c\} = [S]\{u_c\} \quad (2.17)$$

$$[S] = ([G_{cc}] - [H_{cf}][H_{ff}]^{-1}[G_{fc}])^{-1}([H_{cc}] - [H_{cf}][H_{ff}]^{-1}[H_{fc}]) \quad (2.18)$$

式(2.17)、(2.16)即为半无限介质与板相接触部分节点面力与节点位移的关系式及自由表面节点位移计算式。

三、基础板有限元方程

用四节点矩形单元对薄板(中面)进行离散:

$$[K]\{\delta\} = \{Q\} - \{q\} \quad (3.1)$$

式中, $[K] = \sum_e [K]^e$, $[K]^e$ 的求解详见文献[6]。

$$\{\delta\} = \sum_e \{\delta\}^e = \sum_e \{\delta_i \delta_j \delta_p \delta_m\}_e^T$$

$$\{\delta_i\} = \{w_i \theta_{ix} \theta_{iy}\}^T$$

$\{Q\}$ 为等效节点外荷载, $\{Q\} = \sum_e \{Q_i Q_j Q_p Q_m\}_e^T$, $\{Q_i\} = \{P_i M_{ix} M_{iy}\}^T$, $\{q\}$ 为弹性地基反力的等效节点荷载列阵, 将式(3.1)写成分块形式:

$$\begin{bmatrix} [K_{ww}] & [K_{w\theta}] \\ [K_{\theta w}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{O\} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

式中, $\{w\}$ 为竖向位移列阵, $\{\theta\}$ 为转角列阵。

$[K_{ww}]$ 等可由 $[K]$ 随着 $\{w\}$ 和 $\{\theta\}$ 的分块, 进行行列变换而求得。

四、界面协调方程及系统综合算式

板与半无限基础界面(光滑接触)竖向位移是连续的, 并且竖向受力是平衡的。注意到有限元方程中的力是节点集中力, 边界元方程中的力则是分布面力值, 两者要建立一定的转化关系式。另外, 为了使问题得以简化, 又不失实用性, 这里采用放松约束条件, 则:

$$\{u_c\}_{3n \times 1} = [C]_{3n \times n}^T \{w\}_{n \times 1} \quad (4.1)$$

$$\{R\}_{n \times 1} = [C]_{n \times 3n} [L]_{3n \times 3n} \{t_c\}_{3n \times 1} \quad (4.2)$$

式中, n 为板单元节点总数

$$[C]_{n \times 3n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times 3n} \quad (4.3)$$

根据板与基础接触面处竖向力的平衡等效特性可得:

$$[L]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T [N] |J| d\xi d\eta \quad (4.4)$$

$$[N] = [IN_1(\xi, \eta) \quad IN_2(\xi, \eta) \quad IN_3(\xi, \eta) \quad IN_4(\xi, \eta)] \quad (4.5)$$

$$I = \text{diag}(1, 1, 1)$$

将 $[L]_{12 \times 12}$ 扩阶成 $[L_1]_{3n \times 3n}$, 形成对 $[L]_{3n \times 3n}$ 的贡献阵, 则

$$[L]_{3n \times 3n} = \sum_e [L_1]_{3n \times 3n}^e \quad (4.6)$$

联立方程(2.17)、(3.2)、(4.1)、(4.2), 可得弹性地基板的综合算式:

$$\{w\} = ([K_{ww}] - [K_{w\theta}][K_{\theta\theta}]^{-1}[K_{\theta w}] + [C][L][S][C]^T)^{-1} \cdot$$

$$(\{P\} - [K_{w\theta}][K_{\theta\theta}]^{-1}\{M\}) \quad (4.7)$$

$$\{\theta\} = [K_{\theta\theta}]^{-1}(\{M\} - [K_{\theta w}]\{w\}) \quad (4.8)$$

五、算例及结论

1. 集中荷载或方形均布荷载作用下的半无限地基问题

半无限弹性地基承受集中荷载 40kN 或均布荷载 10KPa, 承载面积 $4 \times 4\text{m}^2$, 地基参

数 $E_0 = 50\text{MPa}$, $\mu_0 = 0.3$ 。因为是对称的,故只取 $\frac{1}{4}$ 区域计算(图 2)。计算单元、节点等列于表 1(与文献[1]中有限元解比较)。

计算结果绘于图 3、图 4。

表 1 本文算法与有关方法的比较

方 法	等参元(个)	无界元(个)	结点总数	荷载方式
本文解法	12(平面)	6 (平面)	28	集中
无界有限元解[1]	8 (三维)	12(三维)	100	集中
一般有限元解	27(三维)	—	203	集中
本文解法	12	6	28	均布
无界有限元解[1]	8	12	100	均布

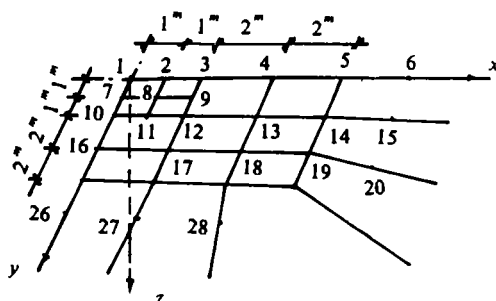
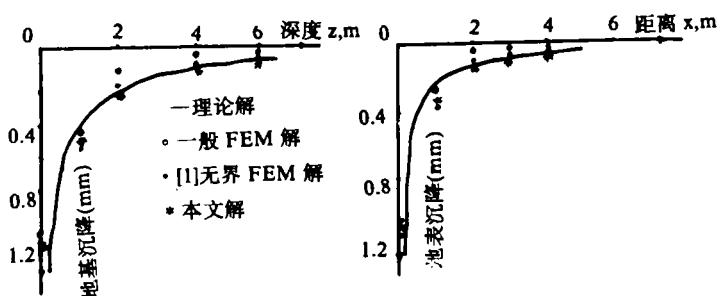


图 2 边界离散网格划分



(a) 集中荷载地基沉降值 (b) 集中荷载时地表沉降值

图 3

由计算结果可见,本文方法只需取较少的平面单元即可达到较好的精度,较一般的有限元法和无界有限元法^[1]具有明显的工作量少、精度高的优越性。

2. 飞机轮载作用于板中时水泥混凝土道面挠度计算

板尺寸: $4 \times 4\text{m}$, $E_c = 35000\text{MPa}$, $\mu_c = 0.167$, $h_c = 0.22\text{m}$

土基: $E_0=350\text{MPa}$, $\mu_0=0.30$
轮迹尺寸: $0.2956\times0.4292\text{m}$
轮压: 850KPa

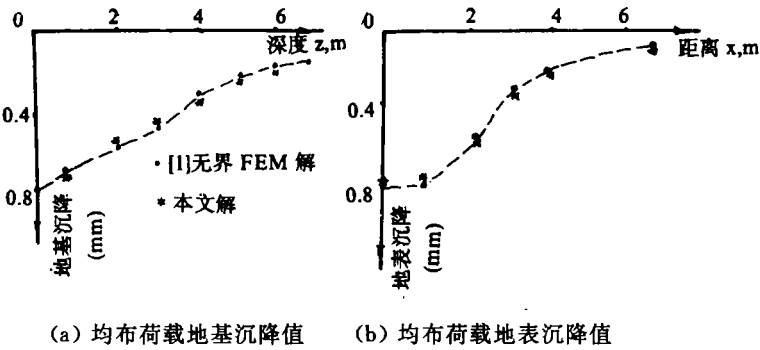


图 4

由于对称,仍取 $\frac{1}{4}$ 区域计算,单元划分仍按图 2 所示。计算结果绘于图 5。

3. 结 语

通过上述计算分析,可知:

(1). 通过用无界边界元模拟无限边界,应用板与基础介质界面的协调条件建立了无界边界元-有限元耦合算式,使得计算更加符合实际情况。计算结果表明,该方法具有数据准备简单,工作量少,精度高等优点,尤其适合于机场道面工程,以及建筑基础工程的受力计算。

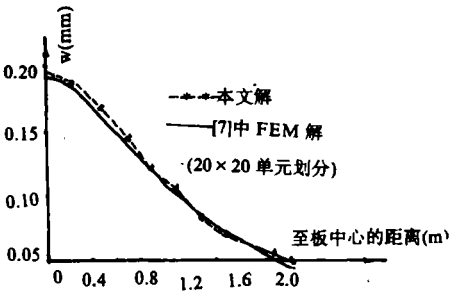


图 5 飞机轮载作用下水泥混凝土道面板挠度曲线

(2). 在形成边界元系数矩阵 $[H]$

和 $[G]$ 的过程中,一般会遇到 $\frac{1}{r^2}$ 和 $\frac{1}{r}$ 奇异性问题。但由于本文重点在于讨论 BEM 和 FEM 耦合方程,限于篇幅,故文内没有提及。文献[2]就这一问题进行了较好的论述。

(3). 本文采用了线性插值,为了提高精度,进一步的工作是采用高次元。另外,本文方法亦可推广应用于弹性地基板的动力分析(时间域和频域),关于这方面的计算分析,笔者将另文发表。

参 考 文 献

[1] 葛修润等, 三维无界元和节理无界元, 岩土工程学报, Vol. 8(5), 1986, 9—20.
[2] Beer. G. and Watson J. O. Infinite Boundary Elements, Int. J. Numer. Methods, Eng, Vol. 28, 1989, 1233—1247.
[3] Spyrakos C. C. and Beskos D. E. Dynamic Response of Rigid Strip—Foundations By A Time-Domain Boundary Element Method. Int. J. Numer. Methods. Eng, Vol. 23, 1989, 1547—1565.
[4] Kokkinos F. T. and Spyrakos C. C. Dynamic Analysis of Flexible Strip—foundations In The

Frequency Domain. Comput. Struct, Vol. 39(5), 1991, 473—482.

- [5] 许金余等, 锚喷支护洞室的弹塑性边界元——有限元耦合计算, 岩土力学进展, 中国展望出版社, 1990年12月。
- [6] 张起森, 道路工程有限元分析法, 人民交通出版社, 北京, 1983。
- [7] 姚炳卿等, 机场刚性道面厚度设计图表, 空军工程学院(资料), 1979。

A CALCULATION METHOD OF COUPLING INFINITE BE AND FE FOR PLATE BASED ON ELASTIC HALF SPACE

Xu Jinyu Wu Zhangchun Leng Peiyi

(The Air Force College of Engineering)

Abstract Using the method of coupling infinite BE and FE, the authors have calculated the thin plate based on elastic half space. The elastic thin plate is treated by FE, the elastic half space treated by BE, and the infinite BE is used to treat the infinite boundary. We get the comprehensive matrix equations considering the compatible conditions on the surface of the plate and the foundation. The results show that the method has many advantages and is very suited for pavement and other foundation engineerings.

Key Words infinite boundary element, finite element, elastic half space, plate