

开小圆孔圆柱壳在内压力 作用下的应力集中

程尧舜 卢文达
(同济大学) (上海机械学院)

提 要 用一组简化的扁壳方程, 分析了受内压作用下的圆柱壳在小圆孔边上的应力集中问题。类似于用薄扁壳方程分析柱壳圆孔附近应力集中的方法, 求出了考虑横向剪切效应的应力集中系数的近似解析解及数值结果, 由此得出了横向剪切效应对应力集中影响的一个新的特性。

关键词 圆柱壳、横向剪切变形, 应力集中

一、引 言

用薄扁壳方程研究带圆孔圆柱壳的应力集中问题, 现已进行过许多工作, 一般的问题都已有近似的解析解和实验数据。如在专著 [5] 中, 徐秉汉等详细讨论了这些问题。但如果小圆孔的半径和壳体厚度差不多大, 用一般的薄扁壳方程来研究应力集中问题就会产生很大的误差, 因此, 对这种情况必须放弃 Kirchhoff 假设, 考虑横向剪切变形的影响。Reissner^[1] 在 1945 年研究了受弯板应力集中问题中的横向剪切效应。Reissner 和 Wan^[2] 在 1986 年, 用文 [3] 中提出的一组考虑横向剪变形的扁壳方程, 讨论了横向剪切对受扭及受剪扁球壳圆孔附近应力集中的影响。近来卢文达和程尧舜^[4] 研究了横向剪变形对开圆孔圆柱壳应力集中的影响。

本文的目的是在文 [4] 的基础上, 具体地研究两端开口带有小圆孔圆柱壳的应力集中问题。在这一具体问题的结果中, 我们可以看出以前没有得出过的一个新的特性。

二、基本方程及其近似解

如图 1 所示, R 为柱壳半径、 x 为沿壳面纵向的坐标。如果圆柱壳上开有半径为 a 的小圆孔、壳厚为 h , 则在 [4] 中已导出求孔边应力集中问题的方程

* 本文收稿日期 1992 年 2 月

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma + i 2 \alpha^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{h^2}{10} \nabla^2 \chi - \chi = 0 \quad (2)$$

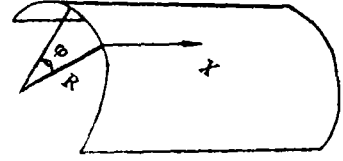


图 1

其中 i 为复单位, $\xi = x/R$, $\alpha = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$
 $\sqrt{R/h}$, ν 为 Poisson 系数。方程 (1) 和薄扁壳方程是一样的, 而方程 (2) 的作用则是在孔边应力集中处考虑了横向剪变形的影响。

现在取原点在圆孔中心的极坐标 (ρ, θ) 作坐标变换

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \varphi = \rho \sin \theta$$

如果我们研究的是对于 x 轴对称的情况, 且圆孔较小, 即假定 $a^2/(Rh) \ll 1$, 则方程 (1) 精确到 $(\alpha\rho/2)^2$ 的解为^[5]

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sigma = & \frac{2A_{00}}{\pi} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} \right) - \frac{A_{10}}{\pi} (1 + \cos 2\theta) - \frac{2B_{12}}{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\rho^2} \\ & + \xi^2 \left[-\frac{A_{00}\rho^2}{4} (2 + \cos 2\theta) + \frac{A_{10}\rho^2}{4} (1 + \cos 2\theta) + \frac{2A_{01}}{\pi} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ & \left. + \frac{B_{01}}{2} - \frac{2B_{22}}{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\rho^2} - \frac{A_{11}}{\pi} (1 + \cos 2\theta) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma = & \frac{\xi^2}{\pi} \left\{ \frac{\pi A_{01}}{2} - 2B_{01} \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} + B_{11} - \frac{B_{21}}{2} + A_{00}\rho^2 \left(2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} + 2 \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} - 1 \right) \right. \\ & - 2B_{01} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + A_{01}\rho^2 \left(\frac{1}{4} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} \right) + \left[A_{00}\rho^2 \left(\ln \frac{\rho}{\rho_0} + \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ & \left. + A_{10}\rho^2 \left(\frac{1}{6} - \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} \right) + B_{11} - \frac{2A_{22}}{\rho^2} - \frac{4A_{12}}{\rho^2} \right] \cos 2\theta \\ & \left. - \left(\frac{\rho^2}{12} A_{10} + \frac{B_{21}}{2} + \frac{4A_{32}}{\rho^2} + \frac{24B_{43}}{\rho^4} \right) \cos 4\theta \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\rho_0 = a/R$, A_{00} 、 A_{01} 、 B_{01} 、 B_{11} ... 等是待定常数, $\ln \gamma = 0.57722$ 是欧拉常数。对应于方程 (1) 的解 (3)、(4), 方程 (2) 具有如下形式的解:

$$\chi = C_2 K_2(\eta \xi^2 \rho) \sin 2\theta + C_4 K_4(\eta \xi^2 \rho) \sin 4\theta \quad (5)$$

其中 $\eta = 4\sqrt{10/3(1-\nu^2)}$, $\xi = \alpha/2$, C_2 、 C_4 是待定常数, K_n 为第二类变形贝塞尔函数。

内力分量的表达式如下:

$$N_\rho = \frac{Eh}{2a^2 R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \operatorname{Im} \sigma \quad (6)$$

$$N_{\theta} = -\frac{Eh}{2\alpha^2 R} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \text{Im}\sigma \quad (7)$$

$$N_{\rho\theta} = -\frac{Eh}{2\alpha^2 R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \text{Im}\sigma \quad (8)$$

$$M_{\rho} = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \nu \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(1 + \frac{AD}{R^2} \nabla^2 \right) \text{Re}\sigma \\ + \frac{AD}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \chi \quad (9)$$

$$M_{\theta} = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \left(1 + \frac{AD}{R^2} \right) \text{Re}\sigma \\ - \frac{AD}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \chi \quad (10)$$

$$M_{\rho\theta} = -\frac{D}{R^2} (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(1 + \frac{AD}{R^2} \nabla^2 \right) \text{Re}\sigma \\ + \frac{(1-\nu)AD}{R^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \chi - \chi \quad (11)$$

$$Q_{\rho} = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 v + \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (12)$$

$$Q_{\theta} = -\frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 v - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \quad (13)$$

其中 E 为弹性模量, D 为弯曲刚度, $A = 12(1+\nu)/(5Eh)$, N 表示薄膜力, M 表示弯矩和扭矩, Q 为横向剪力。

三、两端开敞圆柱壳在内压作用下圆孔边上的应力集中

承受均匀分布内压力 P 的两端开敞圆柱壳, 在没有小圆孔的情况下, 其内力的计算无任何困难, 在 (ξ, φ) 坐标中, 轴向和周向薄膜力分别为

$$N_{\xi} = 0 \quad (14)$$

$$N_{\varphi} = PR \quad (15)$$

所有弯曲内力为零。在 (ρ, θ) 坐标系中, 有

$$N_{\rho} = \frac{1}{2} PR - \frac{1}{2} PR \cos 2\theta \quad (16)$$

$$N_{\theta} = \frac{1}{2} PR + \frac{1}{2} PR \cos 2\theta \quad (17)$$

$$N_{\rho\theta} = \frac{1}{2} PR \sin 2\theta \quad (18)$$

如果壳上开有圆孔, 则上面均匀内力场将要变化, 这一变化量和上述内力场叠加在一起应满足孔口边界条件。下面将研究如下孔口边界条件下的应力集中问题。

$$N_{\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = N_{\rho\theta} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (19)$$

$$M_{\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = M_{\rho\theta} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (20)$$

$$Q_{\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = -\frac{PR\rho_0}{2} \quad (21)$$

由小圆孔引起的内力变化是由式 (6) — (13) 表示的, 把它们和式 (16) — (18) 表示的均匀内力叠加, 然后, 代入孔口边界条件式 (19) — (21), 可得一组代数方程。由这一组方程可解出如下常数

$$\begin{aligned} A_{00} &= 2H, \quad A_{10} = -4H, \quad B_{21} = \rho_0^2 H \\ A_{01} &= 2\pi\rho_0^2 H, \quad A_{11} = -3\pi\rho_0^2 H, \quad B_{22} = \frac{3}{4}\pi\rho_0^2 H \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $H = \pi R \rho_0^2 \xi^2 \sigma_{\varphi} / E$, $\sigma_{\varphi} = PR/h$ 。

$$\frac{B_{11}}{\rho_0^2} = \frac{1}{2f+1+\nu} \left[\left(\frac{41}{3} - \frac{5}{3}\nu + 12(1-\nu) \ln \frac{\xi\rho_0\gamma}{\sqrt{2}} \right) \lambda^2 - \frac{48(1+2f)}{(1-\nu)} \right] \frac{H}{\lambda^2} \quad (23)$$

$$\frac{A_{32}}{\rho_0^4} = \frac{1}{6(1+\nu) + 12g} \left[g \left(\frac{32}{(1-\nu)\lambda^2} - 1 \right) - 1 - \frac{16(1-2\nu)}{(1-\nu)\lambda^2} \right] H \quad (24)$$

其中 $\lambda = \sqrt{10}a/h$,

$$f = 1 - \frac{2}{\lambda} \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)}, \quad g = 1 - \frac{6}{\lambda} \frac{K_3(\lambda)}{K_4(\lambda)}$$

为简单起见, 再引入记号

$$B = \frac{B_{11}}{\rho_0^2 H}, \quad A = \frac{A_{32}}{\rho_0^4 H} \quad (25)$$

有了上述常数后就可求得薄膜应力集中系数

$$K_m = 3 + \frac{5\pi\rho_0^2\xi^2}{2} \quad (26)$$

由此可见, 只要 $a^2/(Rh) \ll 1$, 则薄膜力应力集中系数和横向剪切效应无关, 也就是说和用薄壳理论求得的结果一致^[6]。

在孔边上, 由于内力满足边界条件, M_{θ} 的表达式可简化成

$$M_{\theta} = -\frac{D}{R} (1+\nu) \nabla^2 \left(1 + \frac{AD}{R^2} \nabla^2 \right) \text{Re} \sigma \Big|_{\rho=\rho_0} \quad (27)$$

从上式及式 (4), 我们可以看出, 要计算孔边上的 M_{θ} , 只需要用到上面已求出的常

数, 其它常数就没有必要再去求了。孔边上的弯曲应力集中系数为

$$K_b = -\frac{3(1+\nu)}{32} \frac{a^2}{Rh} \left\{ 20 + 32 \ln \frac{\xi \rho_0 \gamma}{\sqrt{2}} + (24 - 48) \cos 2\theta \right. \\ \left. + (4 + 48A) \cos 4\theta - \frac{192}{(1-\nu)\lambda^2} \cos 2\theta + \frac{64}{(1-\nu)\lambda^2} \cos 4\theta \right\} \quad (28)$$

上式在 $\theta = \pi/2$ 时取最大值。图 2 中画出了 $\nu = 0.3$, $\theta = \pi/2$ 时的弯曲应力集中系数曲线。

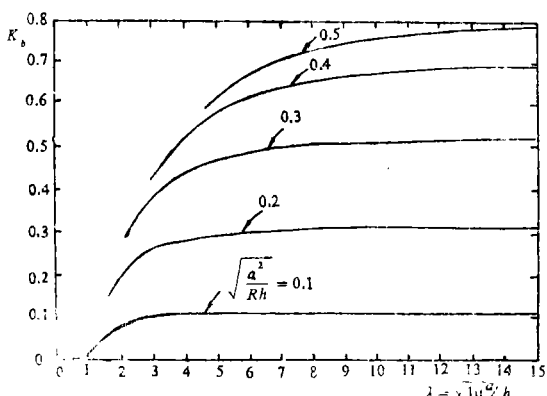


图 2 弯曲应力集中系数

四、结 论

在研究板壳孔边应力集中问题时, 若考虑横向剪变形的影响, 以前的许多文献中 (例如 [1]、[2] 和 [4]) 都得出结论应力集中系数随 a/h 的减小而增大。甚至在有些情况, 考虑横向剪变形后得出的应力集中系数会比用薄壳理论得出的结果大几个量级 [2]。但本文前面的结果 (如图 2 示) 却表明前面研究的例子的应力集中系数随 a/h 的减小而减小。因此, 横向剪变形的影响不一定使应力集中系数增大, 在有些情况下确实会使应力集中系数减小。这一特性是以前的文献从没有得到过的。

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J. Appl. Mech. 12, 2, 1945, p. 69.
- [2] Reissner, E., and Wan, F. Y. M., On the Effect of Transverse Shear Deformability on Stress Concentration Factors for Twisted and Sheared Shallow Spherical shells, J. Appl. Mech. Vol 53, 1986, pp. 597—601.
- [3] Reissner, E., and Wan, F. Y. M., A Note on the Linear Theory of Shallow Shear-Deformable Shells, Z. A. M. P. Vol. 33, 1982, pp. 425—427.

- [4] 卢文达, 程尧舜, 横向剪变形对具有一小圆孔的浅壳应力集中系数的影响, 应用数学和力学, Vol.12, No2., 1991, pp.195—202.
- [5] 徐秉汉, 裴俊厚, 朱邦俊, 《壳体开孔的理论与实验》, 国防工业出版社, 北京, 1987.

STRESS CONCENTRATION OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH A SMALL CIRCULAR HOLE UNDER INTERNAL PRESSURE

Cheng Yaoshun Lu Wenda
(Tongji University) (Shanghai Inst. of Mech. Eng.)

Abstract With a simplified set of equations of shallow shells, the stress concentration is analysed for circular cylindrical shells with a small circular hole under internal pressure. Taking account of the effect of transverse shear-deformability, we obtain the approximate analytical solution and numerical results of stress concentration factors with the method similar to that used in the analysis of stress concentration for cylindrical shells by the theory of thin shallow shells. The results show some new features of the transverse shear deformation effect on the stress concentration.

Key words Circular Cylindrical Shells, Transverse Shear Deformation, Stress Concentration.