

轴向循环载荷下直杆的一个弹塑性计算模型

扬 敏

(华中理工大学)

摘 要

本文给出了轴向循环载荷下直杆的一个弹塑性计算模型。在大应变条件下得到了该模型各变形阶段中载荷——挠度的解析关系式。

关键词：杆，循环载荷，弹塑性模型。

一、引 言

结构元件在准静态或低周循环载荷作用下弹塑性承载能力的研究在诸如船舶结构、海洋平台以及建筑物抗震等工程问题中有着广泛的背景⁽¹⁻³⁾。对于杆这种基本元件的理论分析通常采用塑性铰方法和有限元法⁽⁴⁻⁶⁾。Shibota⁽⁷⁾综合两种方法的优点，假定杆的弯曲变形仅发生在中间一段，通过数值计算得到载荷与轴向位移的关系。

本文提出了准静态轴向循环载荷下杆的一个弹塑性模型，在大变形条件下得到载荷对于最大横向位移的解析式，并认为这种模型能对强循环载荷下杆的弹塑性承载能力作出合理的预测。

二、模型与分析

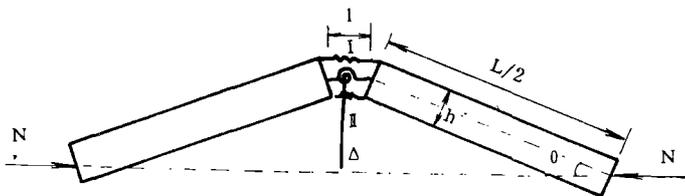


图 1

图 1 中长为 $L/2$ 的两个刚杆由拉簧 I、II 及扭簧相连接。设拉簧载荷 F 与它的轴向变形 x 的关系如图 2 (a) 所示，扭簧扭矩 M 与转角 α 的关系

如图 2 (b) 所示。二者均为线性弹塑性，且为等向强化。

设 N 为轴向载荷（压为正）； Δ 为杆中点最大位移； θ 为杆端点转角； l 为两刚杆中线相邻端点的距离； h 为横截面高度（见图 1）。若初始时刻 $\theta = \theta_0$ ， $l = l_0$ ，则大变形下拉簧 I、II 分别缩短：

$$x_1 = (l_0 - l) + h(\sin \theta_0 - \sin \theta) \quad (1)$$

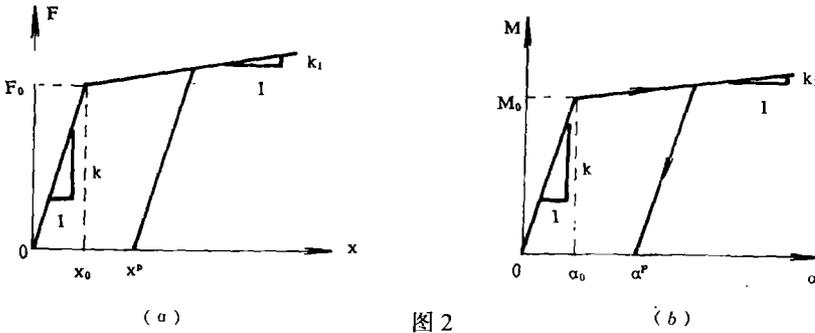


图 2

$$x_2 = (l_0 - l) - h(\sin - \theta_0 - \sin\theta) \tag{2}$$

扭簧转角为:

$$\alpha = 2(\theta - \theta_0) \tag{3}$$

又有 $\Delta = \frac{L}{2} \sin\theta$ 或:

$$\theta = \sin^{-1} \frac{2\Delta}{L} \tag{4}$$

由刚杆的平衡方程, 有:

$$N = F_1 + F_2 \tag{5}$$

$$N\Delta + F_1 \frac{h}{2} \cos\theta = M + F_2 \frac{h}{2} \cos\theta \tag{6}$$

其中 F_1, F_2 分别为拉簧 I, II 的内力 (压为正), M 为扭簧的内力矩, 设其现时塑性变形分别为 x_1^p, x_2^p 及 α^p (见图 2), 则 $F_1 = k(x_1 - x_1^p), F_2 = k(x_2 - x_2^p), M = k(\alpha - \alpha^p)$, 代入 (6) 式, 并利用 (1) ~ (4) 式得:

$$N = \frac{K \left(2 \sin^{-1} \frac{2\Delta}{L} - 2\theta_0 - \alpha^p \right) + 2 \sqrt{1 - \delta^2} \left[\delta - \sin\theta_0 + \frac{1}{2h} (x_1^p - x_2^p) \right]}{\Delta} \tag{7}$$

在弹性状态下的理想直杆, θ_0, x_1^p, x_2^p 及 α^p 均为零。此时令 $\Delta \rightarrow 0$, 可得临界层曲载荷 (相当于 Euler 载荷) $N_0 = 2(2K + kh^2) / L$ 。令 $\delta = \frac{2\Delta}{L}, n = \frac{N}{N_0}$, 代入 (7) 式得:

$$n = \frac{\eta \left(\sin^{-1} - \theta_0 - \alpha^p / 2 \right) + \sqrt{1 - \delta^2} \left[\delta - \sin\theta_0 + \frac{1}{2h} (x_1^p - x_2^p) \right]}{(\eta + 1)\delta} \tag{8}$$

其中 $\eta = \frac{2K}{kh^2}$ 。现考虑如下典型的加卸载过程:

1) N 由初始状态加载, 拉簧及扭簧均为弹性。此时 $x_1^p = x_2^p = \alpha^p = 0$, 由 (8) 式有:

$$n = \frac{\eta(\sin^{-1} - \theta_0) + \sqrt{1 - \delta^2} (\delta - \sin\theta_0)}{(\eta + 1)\delta} \tag{9}$$

2) N 继续增大, 拉簧 II 及扭簧进入塑性 (这里假定二者同时进入塑性)。此时有 $x_1^P = 0$, 且

$$x_2^P = \frac{k - k_1}{k} (x_2 - x_0) \tag{10}$$

$$\alpha^P = \frac{k - k_1}{k} (x - x_0) \tag{11}$$

由(1)、(2)、(5)、(10)式可得:

$$x_2^P = \frac{k - k_1}{k + k_1} 2h \left[n \frac{h}{L} (\eta + 1) - \frac{x_0}{h} + (\delta - \sin \theta_0) \right] \tag{12}$$

将上两式代入(8)式, 得:

$$n = \frac{(k + k_1) [\eta_1 (\sin^{-1} \theta_0 - \theta_0) + x_0 (\eta - \eta_1) / 2] + \sqrt{1 - \delta^2} [2k_1 (\delta - \sin \theta_0) + (k - k_1) x_0 / h]}{(\eta + 1) [(k + k_1) \delta + (k - k_1) \sqrt{1 - \delta^2} h / L]} \tag{13}$$

其中 $\eta_1 = \frac{2K_1}{kh^2}$

3) N 变为卸载, 设开始卸载点为 $(\bar{n}, \bar{\delta})$, 由 (8) 式有:

$$\bar{n} = \frac{\eta (\sin^{-1} \theta_0 - \theta_0 - \bar{x}^P / 2) + \sqrt{1 - \delta^2} (\delta - \sin \theta_0 - \bar{x}_0^P / 2h)}{(\eta + 1) \delta} \tag{14}$$

其中:

$$\bar{\alpha}^P = \frac{k - k_1}{k} (2 \sin^{-1} \bar{\delta} - 2\theta_0 - \alpha_0) \tag{15}$$

$$\bar{x}_2^P = \frac{k - k_1}{k + k_1} 2h \left[\bar{n} (\eta + 1) h / L - \bar{x} / h + (\bar{\delta} - \sin \theta_0) \right] \tag{16}$$

型与分析

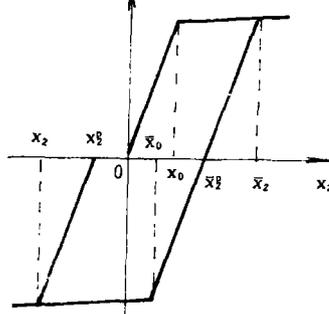


图 3

4) N 继续变小, 拉簧 II 及扭簧进入反向塑性状态, 如图 3, 设拉簧 II 的现时塑性变形为 x_2^P , 现时拉伸极限变形为 \bar{x}_0 , 与情形 3) 中卸载点, $(\bar{n}, \bar{\delta})$ 对应的变形为 \bar{x}_2 , 则

$$\bar{x}_2^P = (\bar{x}_0 + \bar{x}_2) / 2, \text{ 由 (10) 式得 } \bar{x}_2 = k \bar{x}_2^P / (k - k_1) + x_0, \text{ 故 } \bar{x}_0 = (k - 2k_1) \bar{x}_2^P / (k$$

$-k_1) - x_0$, 其中 \bar{x}_2^P 由 (16) 式给出。同理有 $\bar{\alpha}_0 = (k + 2k_1)\alpha^{-P} / (k - k_1) - \alpha_0$, 这里 $\bar{\alpha}_0$ 为扭簧的现时反向弹性极限, $\bar{\alpha}^P$ 由(15)式给出。又有:

$$\bar{x}_2^P = \frac{k - k_1}{k} (x_2 - \bar{x}_2^P) \tag{17}$$

$$\bar{\alpha}^P = \frac{k - k_1}{k} (\alpha - \bar{\alpha}_0) \tag{18}$$

比较 (10), (11), (17), (18) 四式, 发现在 (13) 式中将 α_0 换成 $\bar{\alpha}_0$, x_0 换成 \bar{x}_0 , 就可得到 $n \sim \delta$ 的解析关系。

在拉簧 I 始终为弹性的假设下, 以上四种情形概括了一般的加卸载过程, 故任意循环下的 $n \sim \delta$ 解析式可以求得。

三、讨论与结论

1. 参数的确定

设实际杆弹性模量为 E , 强化模量 E_1 , 初始极限应变 ε_0 , 杆长 L , 横截面积 A 。若纯拉时模型与实际杆的物理关系一致, 则 $k = EA / (LL)$, $k_1 = E_1 A / (LL)$, $x_0 = L\varepsilon_0$ 。设杆在弹性状态下屈曲, 则 $P_w = 2(2K + kh^2) / L$, 其中 $P_w = \pi^2 EI / L^2$ 为简支杆的临界层曲载荷。故有:

$$K = E(\pi^2 I - Ah^2) / (4L) \tag{19}$$

其中 I 为横截面惯性矩。设 $K_1 / K = k_1 / k$, 则 $k_1 = E_1(\pi^2 I - Ah^2) / (4L)$ 。若纯弯曲达弹性极限时实际杆与模型弯矩一致, 则 $EI2\varepsilon_0 / h = k\alpha_0 + k\frac{h^2}{2}\alpha_0$, 故 $\alpha_0 = 8L\varepsilon_0 / (\pi^2 h)$ 。

本文模型在 $K \geq 0$ 时有意义, 由 (19) 式有:

$$I \geq Ah^2 / \pi^2 \tag{20}$$

2. $n \sim \delta$ 曲线

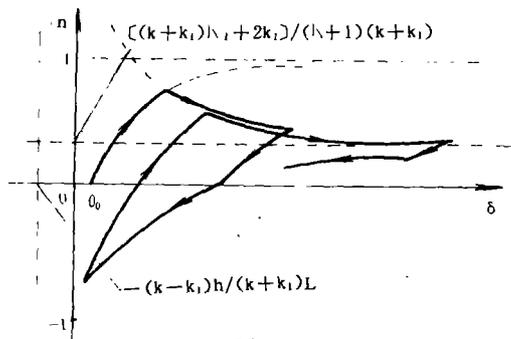


图 4

由 (9)、(13)、(14) 诸式可以看到, 在小变形下 $n \sim \delta$ 曲线均可写成 $n = \frac{a_1 \delta + b_1}{a_2 \delta + b_2}$ 的形

式(其中 a_1, a_2, b_1, b_2 为常数, 与模型参数及变形过程有关)。它是以直线 $n = a_1/a_2, \delta = -b_1/a_2$ 为渐近线的双曲线, 其中心和焦距随不同的加载过程而变化。图 4 给出了 $n \sim \delta$ 曲线的大致形状。其中弹性曲线(指弹性范围内的 $n \sim \delta$ 曲线)均以直线 $n = 1, \delta = 0$ 为渐近线, 塑性曲线(指塑性状态下的 $n \sim \delta$ 曲线)均以 $n = \frac{(k+k_1)\eta_1 + 2k_1}{(\eta+1)(k+k_1)}, \delta = -\frac{(k-k_1)h}{(k+k_1)L}$ 为渐近线。图中看到, 随着循环次数的增加, 杆的承载能力逐渐降低, 载荷 n 的弹性范围越来越窄, 在循环的后期, 杆件几乎完全在塑性状态下承载。

3. 初始缺陷的影响

由图 4 看到在循环载荷过程的后期, n 趋于常数, 只与杆材性质有关, 而与初始缺陷 θ_0 无关。初始缺陷 θ_0 仅对开始几个循环过程有影响。因此, 在强循环载荷下杆的初始缺陷的影响可以忽略。

感谢黄震球副教授对本文工作的支持。

参考文献

- (1) 山本他, 日本造船学会论文集, 第 154 号, (1983) PP.516-524.
- (2) Roeder, C. W. and Popov, E. P. Jour. of Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST3, Proc. Paper 13619, Mar. (1978), PP. 391-412.
- (3) 藤田他, 日本造船学会论文集, 第 156 号, (1984), PP.346-354.
- (4) Nonaka, T. Int. J. Solids and Structures, Vol. 9(1973), PP569-580.
- (5) Papadrakakis, M. and Chrysos, L. Jour. of Stric. Eng. ASCE, Vol. 111, No. 6(1985), PP. 1219-1233.
- (6) Mati, UR. and Sminth, D. L. 3rd Int. Conf. Space Struct, held at Guilford, England, H. Nooshin, ed, Applied science Publishers, Ltd. London, England, PP. 625-629(1984) Shibata, M. Int. J. Solids Structures, Vol. 18, No.3(1982), PP. 217-228.

AN ELASTO-PLASTIC MODEL OF A BAR UNDER CYCLIC AXIAL LOADS

Jie Ming

(Huazhong University of Science and Technology)

Abstract

An elasto-plastic computational model of a bar under cyclic loading is presented. Analytical relations of axial loading and lateral displacement in each deform period is reduced under large strain condition for the model.

Keywords: Bar, Cyclic loading, Elasto-plastic model.