

振动计算连锁公式法反演的数值稳定性*

李大华

(国家地震局工程力学研究所)

摘 要

本文讨论了振动计算等时间步长连锁公式反演的数值稳定性, 结果表明, 相对加速度反演公式是不稳定的; 绝对加速度和相对位移反演公式是条件稳定的; 相对速度反演公式是无条件稳定的; 文末对连锁公式反演的应用问题进行了初步地讨论。

关键词: 振动反演, 连锁公式法, 数值稳定性。

一、引 言

线性单自由度振动系统数值反应分析计算的连锁公式法是由王前信教授首先提出的, 笔者曾在计算地震反应谱的精确法公式基础上完善了连锁公式的推导^[1]。

线性单自由度振动系统的运动微分方程为

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\ddot{X}(t) \quad (1)$$

设 $\ddot{X}(t)$ 为地震输入加速度时间过程; ζ 和 ω 分别为该系统的阻尼比和自振圆频率; $y(t)$ 、 $\dot{y}(t)$ 和 $\ddot{y}(t)$ 分别为该振动质点的相对位移、相对速度和相对加速度反应时间过程。基于式(1)推导连锁公式时, 仅对 $\ddot{X}(t)$ 的离散数字形式做了假定, 即令给出的两个相邻输入数字 $\ddot{X}_i = \ddot{X}(t_i)$ 和 $\ddot{X}_{i+1} = \ddot{X}(t_{i+1})$ (以下类似离散数字符号意义相同) 之间, $\ddot{X}(t)$ 是按直线规律分布的, 因此由式(1)得

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = -\left[\ddot{X}_i + \frac{\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i)\right] \quad (t_i \leq t \leq t_{i+1}) \quad (2)$$

* 地震科学联合基金资助 (89158)

$\ddot{x}(t)$ 数字化密度一般很高(例如每秒取50-200个点),这一假定是能够为工程界所接受的。由式(2)便可解析解出具有两步递推格式的振动计算连锁公式,其中等时间步长 $\Delta t \equiv t_{i+1} - t_i$ 时,相对加速度的连锁公式为

$$\ddot{y}_{i+2} = c_1 \ddot{y}_{i+1} + c_2 \ddot{y}_i + c_3 (\ddot{x}_i - 2\ddot{x}_{i+1} + \ddot{x}_{i+2}) \quad (3)$$

绝对加速度 $sa_i = \ddot{x}_i + \ddot{y}_i$ ($i=1, 2, \dots$)的连锁公式为

$$sa_{i+2} = c_1 sa_{i+1} + c_2 sa_i + (c_3 - c_2)\ddot{x}_i - (2c_3 + c_1)\ddot{x}_{i+1} + (1 + c_3)\ddot{x}_{i+2} \quad (4)$$

相对速度的连锁公式为

$$\begin{aligned} \dot{y}_{i+2} = & c_1 \dot{y}_{i+1} + c_2 \dot{y}_i + \frac{1}{2\omega^2 \Delta t} [-(c_1 + 2c_2 + 2\omega \Delta t c_3)\ddot{x}_i + 2(1 + c_2 \\ & + 2\omega \Delta t c_3)\ddot{x}_{i+1} - (2 - c_1 + 2\omega \Delta t c_3)\ddot{x}_{i+2}] \end{aligned} \quad (5)$$

相对位移的连锁公式为

$$\begin{aligned} y_{i+2} = & c_1 y_{i+1} + c_2 y_i + \frac{1}{\omega^3 \Delta t} \{ [\zeta c_1 + (2\zeta + \omega \Delta t)c_2 + (2\zeta^2 - 1)\omega \Delta t c_3]\ddot{x}_i - [2\zeta \\ & - \omega \Delta t c_1 + 2\zeta c_2 + 2(2\zeta^2 - 1)\omega \Delta t c_3]\ddot{x}_{i+1} + [2\zeta - \omega \Delta t - \zeta c_1 + (2\zeta^2 \\ & - 1)\omega \Delta t c_3]\ddot{x}_{i+2} \} \end{aligned} \quad (6)$$

上四式中

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 2e^{-\zeta\omega\Delta t} \cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t \\ c_2 &= -e^{-2\zeta\omega\Delta t} \\ c_3 &= -e^{-\zeta\omega\Delta t} \frac{\sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

二、连锁公式法的反演

连锁公式法的鲜明特征是各反应量的数值递推运算将分别独立进行。该算法具有计算精度高,可节省计算时间等特点。该算法对反应量没有引入任何近似假定,也不会产生任何截断误差。由于连锁公式,特别是加速度反应的连锁公式尤为简单,因而可以提高数值分析效率,避免更多的数值计算舍入误差。笔者曾基于式(3)编制了绝对加速度反应谱的计算程序,并与国内通用的精确公式的计算程序进行了实际计算比较,结果表明,连锁公式法可以相对节省计算时间^[1]。

连锁公式法提供了直接根据某一反应量反演输入加速度时程 $\ddot{x}(t)$ 的数值计算途径,由

式(3)、(4)、(5)和(6)可分别得到如下反演公式

$$\ddot{X}_{i+2} = 2\ddot{X}_{i+1} - \ddot{X}_i + \frac{1}{c_3} [\ddot{y}_{i+2} - c_1 \ddot{y}_{i+1} - c_2 \ddot{y}_i] \quad (8)$$

$$\ddot{X}_{i+2} = \frac{1}{1+c_3} [(c_1+2c_3)\ddot{X}_{i+1} - (c_3-c_2)\ddot{X}_i + sa_{i+2} - c_1 sa_{i+1} - c_2 sa_i] \quad (9)$$

$$\ddot{X}_{i+2} = \frac{1}{2-c_1+2\zeta\omega\Delta tc_3} [2(1+c_2+2\zeta\omega\Delta tc_3)\ddot{X}_{i+1} - (c_1+2c_2+2\zeta\omega\Delta tc_3)\ddot{X}_i - 2\omega^2\Delta t(\dot{y}_{i+2} - c_1\dot{y}_{i+1} - c_2\dot{y}_i)] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{i+2} = & \frac{1}{2\zeta - \omega\Delta t - \zeta c_1 + (2\zeta^2 - 1)\omega\Delta tc_3} \{ [2\zeta - \omega\Delta tc_1 + 2\zeta c_2 \\ & + 2(2\zeta^2)\omega\Delta tc_3]\ddot{X}_{i+1} - [\zeta c_1 + (2\zeta + \omega\Delta t)c_2 + (2\zeta^2 - 1)\omega\Delta tc_3]\ddot{X}_i \\ & + \omega^3\Delta t[y_{i+2} - c_1 y_{i+1} - c_2 y_i] \} \end{aligned} \quad (11)$$

以上四式递推运算的数值稳定性还需加以证明。用上述连锁公式进行递推运算，无论是正演还是反演，对初始值，只需令实际输入第一个数字之前的两个虚拟输入数字和相应的两个反应输出数字皆为0即可。

三、算法的数值稳定性

递推运算数值稳定性判别准则通常用矩阵法给出，并且用传递算子 $[A]$ 的谱半径

$$\left. \begin{aligned} \rho([A]) &\leq 1 \\ \rho([A]) &= 1 \quad \text{且}[A]\text{的初等因子为一次} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

来表示^[2]。这一准则适用于等时间步长连锁公式法正演和反演递推格式数值稳定性的判稳。

关于连锁公式法正演的数值稳定性，由式(3)~(6)可以看出，各式的传递算子 $[A]$ 均为

$$[A] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

这是连锁公式法的又一鲜明特征。注意到式(13)与Z-变换法的传递算子完全相同，便可据此推论，式(3)~(6)不仅是无条件稳定的算法，而且满足收敛性要求^[3]。

1. 相对加速度连锁公式反演的数值稳定性

式(8)递推公式的传递算子为

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

其解向量为 $\{\ddot{X}\}_{i+1} = \{\ddot{X}_{i+2}, \ddot{X}_{i+1}\}^T$, $[A]$ 的特征方程为

$$|[A] - \lambda[I]| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (15)$$

该特征根为两个重根, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 因此, $[A]$ 的谱半径为

$$\rho([A]) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = 1 \quad (16)$$

并不满足式(12)的条件. 即其特征矩阵

$$|[A] - \lambda[I]| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$(\lambda - 1)$ 为一个二次初等因子, 也就是说, $[A]$ 不与对角阵相似. 所以式(8)是不稳定的算法.

2. 绝对加速度连锁公式反演的数值稳定性

同理可得式(9)的传递算子为

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{c_1 + 2c_2}{1 + c_3} & \frac{c_3 - c_2}{1 + c_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{c_1 + 2c_3}{1 + c_3} \lambda + \frac{c_3 - c_2}{1 + c_3} = 0 \quad (19)$$

式(9)存在的条件为

$$1 + c_3 \neq 0 \quad \text{或} \quad \omega \Delta t \neq 0 \quad (20)$$

在此条件下有

$$\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t > \sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t \quad \text{或} \quad 1+c_3 > 0 \quad (21)$$

因此有求根公式

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + 2c_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2(1+c_3)} \quad (21)$$

当 $\Delta = (c_1+2c_3)^2 - 4(1+c_3)(c_3-c_2) < 0$ 时, $\lambda_{1,2}$ 为共轭复根, 相应的谱半径为 $\lambda_{1,2}$ 的模, 即

$$\rho([A]) = \frac{c_3 - c_2}{1+c_3} \leq 1 \quad (21)$$

当 $\Delta > 0$ 时, $\lambda_{1,2}$ 为两实根. 由式(7)中 $\cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}\Delta t < 1$ 两端配方后可证明

$$1 - c_1 - c_2 > (1 - e^{-\zeta\omega\Delta t})^2 \geq 0 \quad (24)$$

所以有

$$4(1+c_3)(1-c_1-c_2) \geq 0 \quad (25)$$

由此可证明

$$\Delta \leq (2-c_1)^2 \quad (26)$$

由于 $2-c_1 > 0$, 因此式(26)两端开平方后可以证明

$$\lambda_{1,2} \leq 1 \quad (27)$$

即相应的谱半径

$$\rho([A]) \leq 1 \quad (28)$$

综上所述, 当 $\Delta \neq 0$ 时, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 此时可知 $[A]$ 的初等因子为一次; 当 $\Delta = 0$ 时, 虽然 $\lambda_1 = \lambda_2$, 但若有 $\zeta \neq 0$, 或 $\zeta = 0$ 且 $\omega\Delta t \neq k\pi$ ($k=1, 2, \dots$), 则

$$\rho([A]) < 1 \quad (29)$$

因此, 式(9)算法是条件稳定的。也就是说, 仅当 $\Delta = 0$ 、 $\zeta = 0$ 且 $\omega \Delta t = k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$) 时式(9)算法才是不稳定的。

3. 相对速度连锁公式反演的数值稳定性

式(10)的传递算子为

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 \frac{1 + c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3}{2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3} & - \frac{c_1 + 2c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3}{2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

其特征方程为

$$(2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3)\lambda^2 - 2(1 + c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3)\lambda + (c_1 + 2c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3) = 0 \quad (31)$$

有求根公式

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3 \pm \sqrt{(1 - c_1 - c_2)^2}}{2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3} \quad (32)$$

由于式(10)存在的条件为

$$\left. \begin{aligned} 2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3 &= 2[1 - e^{-\zeta\omega\Delta t} \cos(\omega\sqrt{1 - \zeta^2} \Delta t - \alpha)] \neq 0 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

满足该条件需同时有 $\zeta \neq 0$ 和 $\omega \Delta t \neq 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 因此当式(10)存在时可以由式(33)证明

$$2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3 > 0 \quad (34)$$

且可证明式(24)中

$$1 - c_1 - c_2 > 0 \quad (35)$$

由式(35)可得

$$c_1 + 2c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3 < 2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3 \quad (36)$$

根据以上三式的关系可以得到式(31)的两个不等实根为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \frac{c_1 + 2c_2 + 2\zeta\omega\Delta tc_3}{2 - c_1 + 2\zeta\omega\Delta tc_3} < 1 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

因此, 相应的谱半径为

$$\rho([A]) = 1 \quad (38)$$

通过对其特征矩阵 $[A] - \lambda[I]$ 施以初等变换可知, 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 相应的两个初等因子 $(\lambda - \lambda_1)$ 和 $(\lambda - \lambda_2)$ 都是一次的。因此, 当式(10)存在时, 该算法是无条件稳定的。

4. 相对位移连锁公式反演的数值稳定性

同理可得式(11)的传递算子及其特征方程, 然后可求得相应的求根公式

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\zeta - \omega\Delta tc_1 + 2\zeta c_2 + 2(2\zeta^2 - 1)\omega\Delta tc_3 \pm \sqrt{\Delta}}{2[2\zeta - \omega\Delta t - \zeta c_1 + (2\zeta^2 - 1)\omega\Delta tc_3]} \quad (39)$$

其中

$$\Delta = 4\zeta^2(1 - c_1 - c_2)^2 + \omega^2\Delta t^2[c_1^2 + 4c_2 + 4(2\zeta^2 - 1)c_3(1 - c_1 - c_2)]$$

由式(39)解析出谱半径并按式(12)判断数值稳定性是较为困难的, 此时可用数值解来判别。

文末所附图中示出了相对位移连锁公式反演的数值稳定性状况, 结果表明, 式(11)是条件稳定的。

四、若干应用问题的初步讨论

振动测试是振动工程学赖以产生和发展的试验基础, 振动观测数据处理则是振动工程中不可缺少的工作环节。振动测试仪器的拾振器机械运动工作原理一般可用线性单自由度受迫振动系统来表述, 即该系统的运动微分方程为式(1), 其中 ξ 和 ω 为振动系统的阻尼比和自振圆频率。显然, 拾振器获得的振动信息为式(1)中的 $\ddot{y}(t)$ 、 $\dot{y}(t)$ 或 $y(t)$ 时间过程, 并不可能直接记录到实际振动量 $\ddot{x}(t)$ 。若对测得的某个反应量进行微积分, 例如测得的反应量为 $\dot{y}(t)$ 便进行微分和积分各一次, 以期同时得到 $\ddot{y}(t)$ 和 $y(t)$, 再代入式(1)才可算得 $\ddot{x}(t)$, 这便是振动观测数据处理中仪器误差校正问题。在强烈地震的近场强震观测数据处

理中,这一微积分运算通常采用了人为假定的数值计算方法,因此校正结果将随该假定的截断误差不同而有差异。由于截断误差的引入,人们只能再借助滤波技术,而滤波频段的确定又是经验性的。连锁公式法则提供了避免微积分运算和滤波,直接由某一反应量反演实际振动输入 $\ddot{X}(t)$,而由 $\ddot{X}(t)$ 便容易较为准确地计算 $\dot{X}(t)$ 和 $X(t)$ 。

连锁公式法为一种时域算法,该方法的反演公式用于振动测试数据处理,仅要求已知拾振器的阻尼比和自振频率,而并不要求拾振器有较宽的振幅和相位直线频响特性,因此该方法不支持拾振器线性频响曲线频带越宽拾振器性能越好的概念,从而方便了测振仪器的研制和扩大了现有仪器的使用范围。显然,连锁公式是一个自校正自适应的时间序列数学模型,由于该公式较为简单,因此便于固化在测振仪器之中。

连锁公式法不仅可用于结构动力反应分析和反演,也可用于结构模态识别。连锁公式法反演的稳定性证明为该方法的正确应用奠定了必要的理论基础。

本文是在刘恢先教授指导下完成的,特此致谢。

参考文献

- [1] 李大华,计算地震反应谱的连锁公式,地震工程与工程振动,第10卷第2期,1990年。
- [2] 朱镜清,论结构动力分析中的数值稳定性,力学学报,第15卷第4期,1983年。
- [3] 程民宪,结构动力分析中几种逐步积分法在负刚度条件下的收敛性和稳定性,工程力学,第6卷第2期,1989年。

NUMERICAL STABILITY OF IVERSE ALGORITHM OF SUCCESSIVE FORMULA METHOD FOR DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS

Li Dahua

(Institute of Engineering Mechanics, State Seismological Bureau)

Abstract

It is discussed that the numerical stability of iverse algorithm of successive formula method for dynamic response analysis in equal time interval case. The results show that the iverse formula of the relative acceleration is instable, the one of the absolute acceleration or the relative displacement is conditionally stable, and the relative velocity is unconditionally stable. It is discussed on preliminary application problems of the algorithm in the end of the paper.

Key Words: Vibrating inversion, successive formula method, numerical stability.

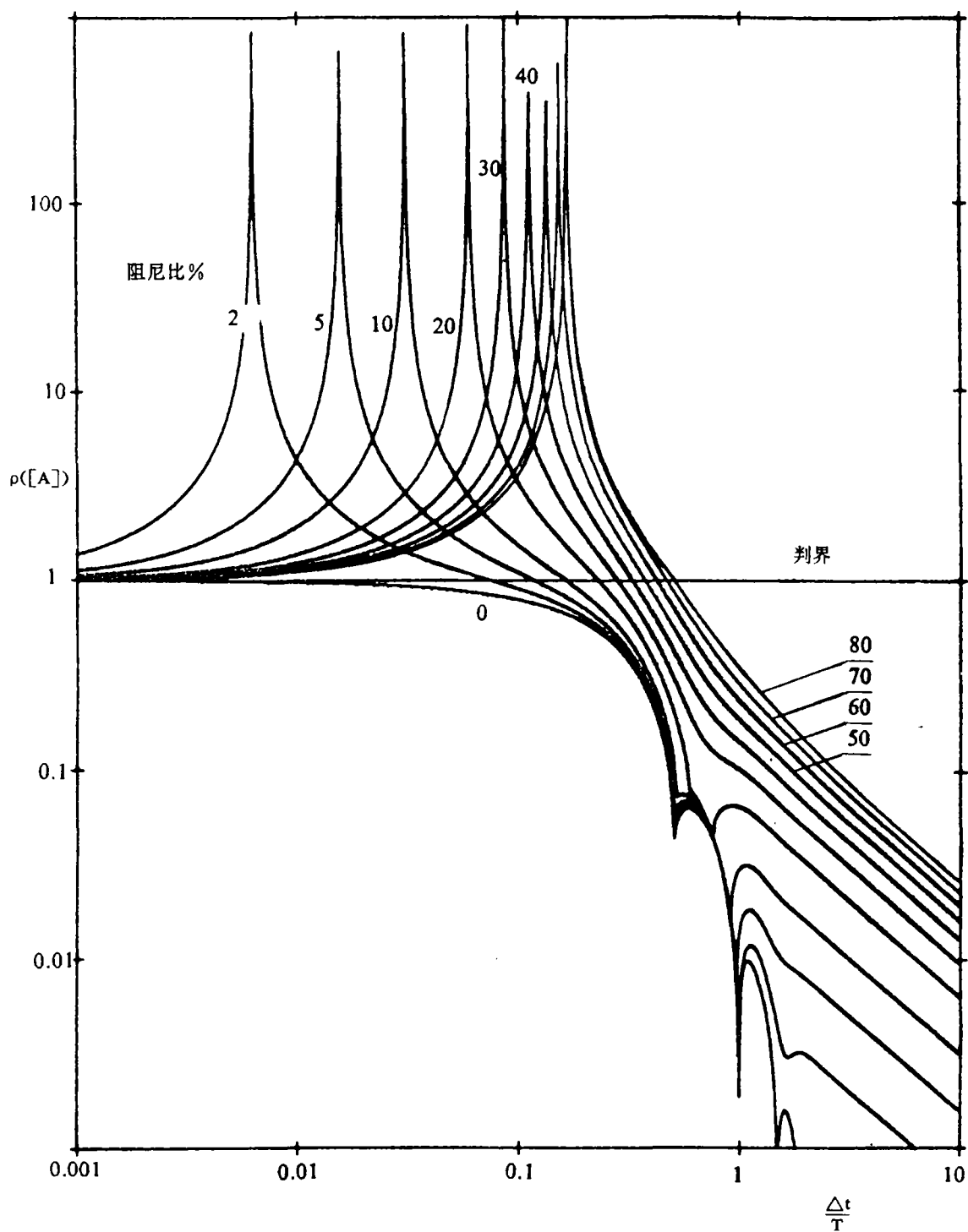


图 相对位移连锁反演的数值稳定性($T = \frac{2\pi}{\omega}$)