

主应力强度因子准则

宋美君 汪木其

(长沙交通学院)

摘 要

本文综合考虑了 σ_θ 、 $\tau_{\theta r}$ 和 $\tau_{\theta z}$ 对裂纹扩展的影响,提出了一个新的复合型断裂准则,与试验结果比较是令人满意的

一、引 言

1963年, F. Erdogan和G. C. Sih^[1]提出了第一个复合型断裂准则,即最大应力准则之后,相继出现了不少以应力为参量的准则^[2~6],但这些准则只考虑了一个应力分量的影响,而其余应力分量忽略不计,1978年马德林^[7]提出了一个组合的应力准则,考虑了三个应力分量 σ_θ 、 $\tau_{\theta r}$ 和 $\tau_{\theta z}$ 的影响,但是他把应力当做矢量,给出了一个“应力矢”

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_\theta^2 + \tau_{\theta r}^2 + \tau_{\theta z}^2}$$

而后定义相应的广义应力强度因子

$$K^* = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma^*$$

并以此为基础提出复合型断裂准则。

我们认为应力是张量,为此作者将提出一个新的复合型应力断裂准则。

二、主应力强度因子的准则有熟知的

弹性力学关系式

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_\theta + \sigma_r + \sigma_z \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z\sigma_r - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{\theta z}^2 - \tau_{rz}^2 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_r\sigma_\theta\sigma_z - \sigma_r\tau_{\theta z}^2 - \sigma_\theta\tau_{rz}^2 - \sigma_z\tau_{r\theta}^2 + \tau_{r\theta}\tau_{\theta z}\tau_{rz} \end{cases} \quad (1)$$

对于穿透性裂纹的复合型断裂问题中,如图(1)所示的坐标系,可知 $\sigma_z = 0$,而 σ_r 和 τ_{rz} 的影响可以忽略不计。

此时式(1)成为

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_\theta \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = -\tau_{r\theta}^2 - \tau_{\theta z}^2 \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

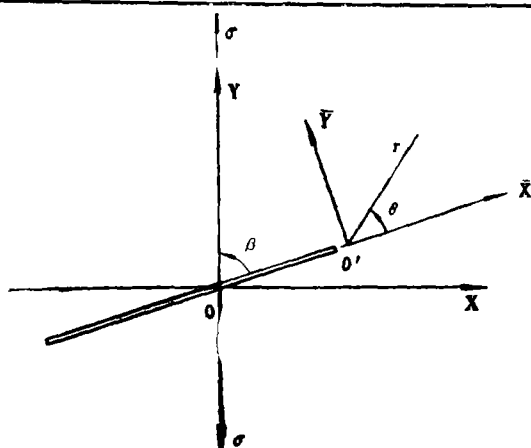


图 1

由此定义相应的主应力强度因子为

$$K^* = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r} \sigma_m \quad (6)$$

在裂纹尖端的应力场为

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_1 (1 + \cos \theta) - 3K_2 \sin \theta] \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_1 \sin \theta + K_2 (3 \cos \theta - 1)] \\ \tau_{\theta z} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} K_3 \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入(5), 再代入(6)得

$$K^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} [K_1 (1 + \cos \theta) - 3K_2 \sin \theta] + [b_{11} K_1^2 + 2b_{12} K_1 K_2 + b_{22} K_2^2 + b_{33} K_3^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{1}{8} (1 + \cos \theta)^2 (5 - 3 \cos \theta) \\ b_{12} = \frac{1}{8} \sin \theta (9 \cos \theta - 7) (1 + \cos \theta) \\ b_{22} = \frac{1}{8} (1 + \cos \theta) (27 \cos^2 \theta - 24 \cos \theta + 13) \\ b_{33} = 2 (1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (9)$$

由此可提出主应力强度因子准则:

(一) 裂纹沿 K^* 取得最大值方向扩展 ($r = \text{const}$) 即以

$$\left. \frac{dK^*}{d\theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0 \quad \text{和} \quad \left. \frac{d^2 K^*}{d\theta^2} \right|_{\theta=\alpha} < 0 \quad (10)$$

不失一般性, 可假设 $\sigma_3 = 0$, 于是式(2)又成为

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_\theta \\ \sigma_1 \sigma_2 = -\tau_{r\theta}^2 - \tau_{\theta z}^2 \end{cases} \quad (3)$$

解式(3)可得

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\sigma_\theta \pm \sqrt{\sigma_\theta^2 + 4(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2)} \right] \quad (4)$$

取最大主应力

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \left[\sigma_\theta + \sqrt{\sigma_\theta^2 + 4(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2)} \right] \quad (5)$$

确定开裂角 α 。

(二) 在 α 方向上, K^* 达到临界值时, 裂纹起始扩展。

我们将根据这一准则, 讨论几种基本复合型。

三、几种基本复合性

(一) I 型

此时 $K_2 = K_3 = 0$

由式(8)、(9)和(10)可知, 除了 $\alpha = \pm\pi$ 裂纹的自由表面条件外, 只有 $\alpha = 0$, 即 I 型裂纹无分枝扩展。

(二) II 型

此时有 $K_1 = K_3 = 0$

由式(8)~(10)可知, 有开裂角 $\cos\alpha = 1/3$, 即 $\alpha = -70.5^\circ$, 这与文献[1]和[8]的结果相同, 并和[1]的实验结果符合甚好。

(三) I-II 复合型(单轴斜拉伸)

此时有

$$\begin{cases} K_1 = \sigma\sqrt{a}\sin^2\beta \\ K_2 = \sigma\sqrt{a}\sin\beta\cos\beta \\ K_3 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

由式(8)~(11)可知有

$$\frac{1 - 3\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\beta \quad (12)$$

这与[1]中的结果相同

当 $K_2 = K_3 = 0$, $\theta = 0$ 且 $K_1 = K_{1c}$ 时, 由式(8)和(9)知

$$K^* = K_{1c} \quad (13)$$

当 I-II 复合型作用处于临界状态时, 可将 $\theta = \alpha$ 和式(13)代入(8)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \left[\frac{K_1}{K_{1c}} (1 + \cos\alpha) - 3 \frac{K_2}{K_{1c}} \sin\alpha \right] + \left[b_{11} \left(\frac{K_1}{K_{1c}} \right)^2 + 2 b_{12} \left(\frac{K_1}{K_{1c}} \right) \left(\frac{K_2}{K_{1c}} \right) \right. \\ \left. + b_{22} \left(\frac{K_2}{K_{1c}} \right)^2 \right]^{1/2} = 2 \end{aligned} \quad (14)$$

由式(12)已知的 β 值可求出 α , 据已知的 α 由式(14)可求出 K_1/K_{1c} 和 K_2/K_{1c} 相关曲线。

(四) III 型

此时有 $K_1 = K_2 = 0$

很明显由式(8)~(10)可知, 裂纹无分枝扩展, 即 $\alpha = 0$

(五) I-III 复合型

此时有 $K_2 = 0$, 不难验证裂纹无分枝扩展, 即 $\alpha = 0$

由式(8)和(13)知,在I-III复合型断裂的临界状态时有(注意此时 $\theta = \alpha = 0$)

$$K_{Ic} = \frac{1}{2} \{ K_1 + [K_1^2 + 4K_3^2]^{\frac{1}{2}} \}$$

亦即

$$\frac{1}{2} \frac{K_1}{K_{Ic}} + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{K_1}{K_{Ic}} \right)^2 + \left(\frac{K_3}{K_{Ic}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (15)$$

这就是I-III复合型相关方程,它与文献[7]的结果和文献[9]实验结果的比较见图(2)。

以上讨论均只适用于脆性断裂情形。当裂纹尖端微小塑性区的影响不能忽略时,其修正可按文献[10]中提出的理论进行。

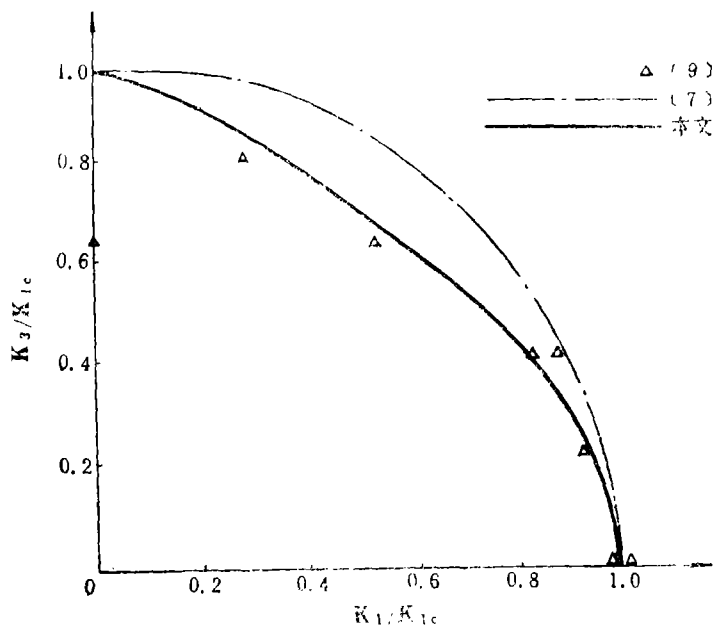


图2

四、结 论

本文提出的主应力强度因子断裂准则,综合考虑了 σ_0 , τ_{r0} 和 $\tau_{\theta z}$ 三个量的影响,且物理意义明确,其结果也较为满意。

参 考 文 献

- [1] F. Erdogan and G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, Trans. ASME, J. Basic Eng. No. 4 (1963), PP. 519—525.
- [2] J. G. Williams and P. D. Ewing, Fracture under complex stress the angled crack problem, Int. J. Fracture, Vol. 8, No. 4 (1972), PP. 441—446.
- [3] I. Fine and A. saith, A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks, Int. J. Fracture, Vol. 19 No. 4 (1973), PP. 484—486.

- [4] 中科院力学所12室. 一个新的复合型断裂准则, 《力学》, No. 2 (1976), PP. 98—103,
- [5] 王锋、杜善义: 关于最大应力复合型断裂准则的修正准则, 《哈工大学报》, No. 3 (1977), PP. 58—64。
- [6] 赵廷仕: 剪应力强度因子断裂准则, 《华中工学院学报》, No. 1 (1979), PP. 132—139。
- [7] 马德林: 广义应力强度因子断裂准则, 《力学学报》, No. 2 (1978), PP. 162—166。
- [8] 汪懋骅: 复合型断裂等能量密度应变准则, 《力学学报》特刊, (1981), PP. 281—285。
- [9] 断裂力学科研组: K_I - K_{II} 复合型断裂试验研究, 《华中工学院学报》, (1977), PP. 47—58。
- [10] 汪懋骅: 复合型断裂应变准则, 《固体力学学报》, No. 4 (1982), PP. 571—581。

MAIN SIF CRITERION

Song Meian Wang Muqi

(Changsha Communications Institute)

Abstract

A new criterion of mixed crack on σ_{θ} , $\tau_{\theta r}$ and $\tau_{\theta z}$ to crack growth influence is proposed. The results is more satisfaction compared with experiment ones.