

双参数地基上偏心集中力作用的圆板

王 竹 鸣

(西安冶金建筑学院)

摘 要

本文得到了双参数地基(Pasternak)上圆板非轴对称弯曲的精确解。作为例子,详细研究了承受偏心集中力作用的圆形板。从文中得到的结果可看出,文献[5]中轴对称情况下改进的Vlazov解是这里的特殊情况。

一、前 言

对于 Winkler 基础上圆板弯曲问题,早在五十年代就有许多作者进行研究。但由于 Winkler 基础上表面发生位移仅限于受荷区,这大大限制了对于具有少许粘性或具有传递力性土介质中的应用。1954 年 Pasternak P. L. 提出了一种双参数地基模型,即模型用两个独立的弹性常数表征。对于双参数地基(Pasternak)上圆板弯曲,也曾有作者对此进行过研究,但研究大多局限于轴对称弯曲情形,对于圆板非轴对称弯曲,却研究较少。

本文得到了 Pasternak 地基上圆板非轴对称弯曲的精确解。作为数值算例,详细研究了承受偏心集中力作用的圆形板。从文中得到结果可看出,文献[5]中轴对称情况下改进的 Vlazov 解是这里的特殊情况。

二、问题的方程

弹性地基上圆板的基本方程为

$$D\nabla^4 w(r, \theta) = P - q \quad (2-1)$$

式中 q 为地基反力,对于双参数地基(Pasternak)有

$$q = kw(r, \theta) - G_p \nabla^2 w(r, \theta) \quad (2-2)$$

将式(2-2)代入(2-1)中可得双参数地基上圆板的控制方程

$$D\nabla^4 w(r, \theta) - G_p \nabla^2 w(r, \theta) + kw(r, \theta) = P \quad (2-3)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, G_p 、 k 分别为地基特征参数, $w(r, \theta)$ 为地基表面的位移, P 为外载荷。

此时圆板发生变形的内力可表示为:

$$\begin{aligned}
 \theta_r &= \frac{\partial w}{\partial r} \\
 M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\
 M_\theta &= -D \left[\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \\
 Q_r &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right) \\
 M_{r\theta} &= -D(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

三、一般弯曲解析解

方程 (2-3) 即为双参数地基上圆板一般弯曲的基本方程:

$$D \nabla^4 w(r, \theta) - G_p \nabla^2 w(r, \theta) + k w(r, \theta) = P(r, \theta) \tag{3-1}$$

引入无量纲量 $x = r/L$, 其中 $L^4 = D/k$, 则方程 (3-1) 可改写为

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) - \beta^2 \nabla^2 w(r, \theta) + w(r, \theta) = P(r, \theta) L^4 \tag{3-2}$$

其中
$$\beta^2 = \frac{G_p}{D} L^2$$

而方程 (3-2) 解可表示为 $w = w_H + w_p$, 其中 w_p 为方程的任一特解, 根据荷载情况而定。齐次解 w_H 满足下列齐次方程:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_H - \beta^2 \nabla^2 w_H + w_H = 0 \tag{3-3}$$

当 $\beta^4 - 4 < 0$ 时, 方程 (3-3) 可分解为

$$(\nabla^2 + e^{i\alpha})(\nabla^2 + e^{-i\alpha})w_H = 0 \tag{3-4}$$

其中
$$\cos \alpha = -\frac{\beta^2}{2}$$

则方程 (3-4) 的解为

$$\begin{aligned}
 w_H &= \sum_{n=0}^{\infty} [C'_{n1} u_n(x) + C'_{n2} v_n(x) + C'_{n3} f_n(x) + C'_{n4} g_n(x)] \cdot \\
 &\quad \cdot (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)
 \end{aligned} \tag{3-5}$$

其中 C'_{n1} , C'_{n2} , C'_{n3} 和 C'_{n4} 以及 A_n , B_n 为待定常数, 而实函数 $u_n(x)$, $v_n(x)$, $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 分别为

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= \frac{1}{2} \left[J_n \left(x e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) + J_n \left(x e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) \right] \\
 v_n(x) &= \frac{1}{2i} \left[J_n \left(x e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) - J_n \left(x e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) \right] \\
 f_n(x) &= \frac{1}{2} \left[Y_n \left(x e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) + Y_n \left(x e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) \right] \\
 g_n(x) &= \frac{1}{2i} \left[Y_n \left(x e^{\frac{i\alpha}{2}} \right) - Y_n \left(x e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{3-6}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{2i} \left[\left(x e^{\frac{ia}{2}} \right) - Y_n \left(x e^{-\frac{ia}{2}} \right) \right]$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

其中

J_n ——第一类 n 阶 Bessel 函数。 Y_n ——第二类 n 阶 Bessel 函数。

故方程 (3-2) 解为

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} [C'_{n1} u_n(x) + C'_{n2} v_n(x) + C'_{n3} f_n(x) + C'_{n4} g_n(x)] (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + w_p \quad (3-7)$$

此时圆板变形和内力表达式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{\infty} [C'_{n1} u'_n(x) + C'_{n2} v'_n(x) + C'_{n3} f'_n(x) + C'_{n4} g'_n(x)] \\ &\quad (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + \theta_p \\ M_r &= -\frac{D}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C'_{n1} \left[v_n(x) \sin \alpha - u_n(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} u'_n(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n^2}{x} u_n(x) \right] + C'_{n2} \left[-u_n(x) \sin \alpha - v_n(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} v'_n(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n^2}{x} v_n(x) \right] + C'_{n3} \left[g_n \sin \alpha - f_n(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} f'_n(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n^2}{x} f_n(x) \right] + C'_{n4} \left[-f_n(x) \sin \alpha - g_n(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} g'_n(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{n^2}{x} g_n(x) \right] \right\} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + M_{rp} \\ M_\theta &= -\frac{D}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C'_{n1} \left[-\mu u_n(x) \cos \alpha + \mu v_n(x) \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. u'_n(x) - \frac{n^2}{x} u_n(x) \right] + C'_{n2} \left[-\mu v_n(x) \cos \alpha - \mu u_n(x) \sin \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1-\mu)}{x} \left(v'_n(x) - \frac{n^2}{x} v_n(x) \right) \right] + C'_{n3} \left[-\mu f_n(x) \cos \alpha + \mu g_n(x) \sin \alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1-\mu)}{x} \left(f'_n(x) - \frac{n^2}{x} f_n(x) \right) \right] + C'_{n4} \left[-\mu g_n(x) \cos \alpha - \mu f_n(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} \left(g'_n(x) - \frac{n^2}{x} g_n(x) \right) \right] \right\} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + M_{\theta p} \\ Q_r &= -\frac{D}{L^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ C'_{n1} [-\cos \alpha u'_n(x) + \sin \alpha v'_n(x) + \right. \\ &\quad \left. + C'_{n2} [-\sin \alpha u'_n(x) - \cos \alpha v'_n(x)] + C'_{n3} [-\cos \alpha f'_n(x) + \sin \alpha g'_n(x)] \right. \\ &\quad \left. + C'_{n4} [-\sin \alpha f'_n(x) - \cos \alpha g'_n(x)] \right\} \end{aligned} \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + Q_{rp} \\
 M_{r\theta} = & -\frac{D(1-\mu)}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C'_{n1} \left[\frac{n}{x} (u'_n(x) - \frac{u_n(x)}{x}) \right] \right. \\
 & + C'_{n2} \left[\frac{n}{x} \left(v'_n(x) - \frac{v_n(x)}{x} \right) \right] + C'_{n3} \left[\frac{n}{x} \left(f'_n(x) - \frac{f_n(x)}{x} \right) \right] \\
 & \left. + C'_{n4} \left[\frac{n}{x} \left(g'_n - \frac{g_n}{x} \right) \right] \right\} (B_n \cos n\theta - A_n \sin n\theta) + M_{r\theta p}
 \end{aligned}$$

表达式 (3-8) 中记号 w_p 、 θ_p 、 M_{rp} 、 Q_{rp} 、 $M_{\theta p}$ 和 $M_{r\theta p}$ 分别为相应内力对应于 w_p 的特解。式 (3-8) 即为双参数地基上圆板一般弯曲情形的精确解。

当 $n=0$ ，问题即退化为弹性地基上圆板轴对称弯曲情形，各未知量仅是 r 的函数，而与 θ 无关。此时式 (3-8) 退化为（同时设 $C'_{01}A=C_{01}$ ， $\dots$ ， $C'_{04}A=C_{04}$ ）

$$\begin{aligned}
 M_{r0} &= 0 \\
 w &= C_{01}u_0(x) + C_{02}v_0(x) + C_{03}f_0(x) + C_{04}g_0(x) + w_p \\
 \frac{\partial w}{\partial r} &= C_{01}u'_0(x) + C_{02}v'_0(x) + C_{03}f'_0(x) + C_{04}g'_0(x) + \theta_p \\
 M_r = & -\frac{D}{L^2} \left\{ C_{01} \left[v_0(x) \sin \alpha - u_0(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} u'_0(x) \right] \right. \\
 & + C_{02} \left[-u_0(x) \sin \alpha - v_0(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} v'_0(x) \right] \\
 & + C_{03} \left[g_0(x) \sin \alpha - f_0(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} f'_0(x) \right] \\
 & \left. + C_{04} \left[-f_0(x) \sin \alpha - g_0(x) \cos \alpha - \frac{(1-\mu)}{x} g'_0(x) \right] \right\} + M_{rp} \\
 M_{\theta} = & -\frac{D}{L^2} \left\{ C_{01} \left[-\mu u_0(x) \cos \alpha + \mu v_0(x) \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} u'_0(x) \right] \right. \\
 & + C_{02} \left[-\mu v_0(x) \cos \alpha - \mu u_0(x) \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} v'_0(x) \right] \\
 & + C_{03} \left[-\mu f_0(x) \cos \alpha + \mu g_0(x) \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} f'_0(x) \right] \\
 & \left. + C_{04} \left[-\mu g_0(x) \cos \alpha - \mu f_0(x) \sin \alpha + \frac{(1-\mu)}{x} g'_0(x) \right] \right\} + M_{\theta p} \\
 Q_r = & -\frac{D}{L^3} \left\{ C_{01} [-\cos \alpha u'_0(x) + \sin \alpha v'_0(x)] \right. \\
 & + C_{02} [-\sin \alpha u'_0(x) - \cos \alpha v'_0(x)] \\
 & + C_{03} [-\cos \alpha f'_0(x) + \sin \alpha g'_0(x)] \\
 & \left. + C_{04} [-\sin \alpha f'_0(x) - \cos \alpha g'_0(x)] \right\} + Q_{rp}
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

式中 $u_0(x)$ 、 $v_0(x)$ 、 $f_0(x)$ 和 $g_0(x)$ 即为式 (3-6) 中 $n=0$ 情形。对式 (3-8) 应用递推关系略加变换，可化为轴对称情形下改进的 Vlazov 解。

四、承受偏心集中力作用的圆板和算例

设在双参数地基上有一半径为 a ，周边简支或夹支的圆板，在点 $A(b, \theta)$ 处有一偏心集中力 P_z 作用，若将点 A 置于 x 轴上，且角 θ 从集中力作用点半径量起，则 A 点有 $\theta = 0$ 。如图 1。此时圆板变形关于轴 x 对称，则对表达式 (3-8) 有

$$B_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4-1)$$

即仅需取第一个级数。

我们用半径为 b 的圆柱截面将圆板分成内外两部分即 $0 \leq r \leq b$ 和 $b \leq r \leq a$ ，在这两部分上挠度及内力分别设为 $w_1, w_2, \dots, M_{r\theta 1}, M_{r\theta 2}$ ，其中待定系数 $C'_{n1}A_n = C_{n1}, C'_{n2}A_n = C_{n2}, \dots$ 随 w_1, w_2 下标变化作相应变化 $C^1_{n1}, C^2_{n2}, \dots$ 。且在圆板内外两部分上荷载 $P = 0$ ，对应各特解 $w_p, Q_{rp}, \dots$ 均为零，因而 $w = w_H$ 。

由于在圆心 $r = 0$ 处，挠度及转角为有限值则有：

$$C^1_{n3} = C^1_{n4} = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4-2)$$

在圆板内外两部分上各内力，考虑式 (4-1) 和 (4-2) 后，还剩下六个待定系数 $C^1_{n1}, C^1_{n2}, C^2_{n1}, C^2_{n2}, C^2_{n3}, C^2_{n4}$ 。这六个待定系数可由下列条件决定

设周边为夹支，则有 $r = a$ 处

$$\left. \begin{aligned} w_2(a, \theta) &= 0 \\ \varphi_{r2}(a, \theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

和在 $r = b$ 圆周上存在连续条件：

$$\left\{ \begin{aligned} w_1(b, \theta) &= w_2(b, \theta) \\ \varphi_{r1}(b, \theta) &= \varphi_{r2}(b, \theta) \\ M_{r1}(b, \theta) &= M_{r2}(b, \theta) \end{aligned} \right. \quad (4-4)$$

第六个条件由于剪力在圆内除 A 点以外处处连续，则根据在 A 点剪力不连续条件有

$$Q_{r2} - Q_{r1} = P_z \quad (4-5)$$

由于式 (4-5) 左边是一个余弦级数展开式，因而我们需将集中力 P_z 展为 Fourier 级数。首先设由 $b \cdot 2 \cdot \Delta\theta$ 局部线荷载来代替集中力 P_z ，如图 2。则在 $-\Delta\theta$ 和 $+\Delta\theta$ 之间，线荷载强度为：

$$p_z = \frac{P_z}{2b\Delta\theta} = \cos st \quad (4-6)$$

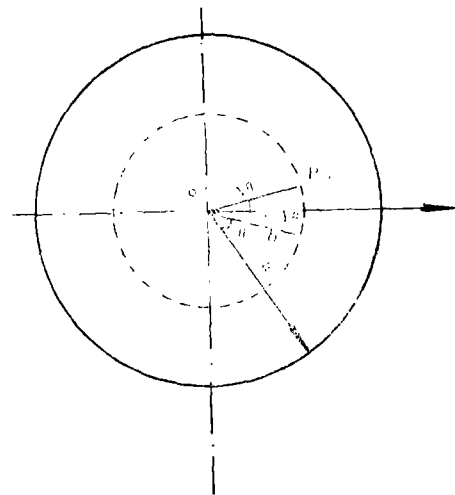


图 2

由于任意函数的余弦级数展开可应用取偶函数的方法求得。因为是在极坐标 (r, θ) 中，则设 $T = 2\pi$ ， $p_z(\theta)$ 可表示为：

$$p_z(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad (4-7)$$

有:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p_z(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Delta\theta} \frac{P_z}{2b\Delta\theta} d\theta = \frac{P_z}{\pi b} \quad (4-8)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p_z \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Delta\theta} \frac{P_z}{2b\Delta\theta} \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{P_z}{\pi b n \Delta\theta} \sin n \Delta\theta \end{aligned} \quad (4-9)$$

因而线荷载余弦级数可表示为

$$p_z(\theta) = \frac{P_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \Delta\theta}{n \Delta\theta} \cos n\theta \right) \quad (4-10)$$

当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, 即局部线荷载的极限来代替 A 点集中力。式 (4-10) 变为

$$p_z(\theta) = \frac{P_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \right) \quad (4-11)$$

式 (4-5) 可写成

$$Q_{r2} - Q_{r1} \Big|_{r=b} = \frac{P_z}{\pi b} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \right) \quad (4-12)$$

由式 (4-3)、(4-4) 和 (4-12) 即可决定待定系数。

我们对双参数地基 (Pasternak) 上周边夹支圆板进行了数值计算: (1) 圆板在沿 $r = b$ 圆周上有均匀线荷作用, 即为式 (4-12) 中 $n = 0$ 轴对称情形。(2) 在圆板 A 点 ($b, 0$) 有集中力 P_z 作用。计算时取 $a/b = 2$, $\mu = 0.167$, $\alpha/2 = 47^\circ$, 所得结果图 3 所示。

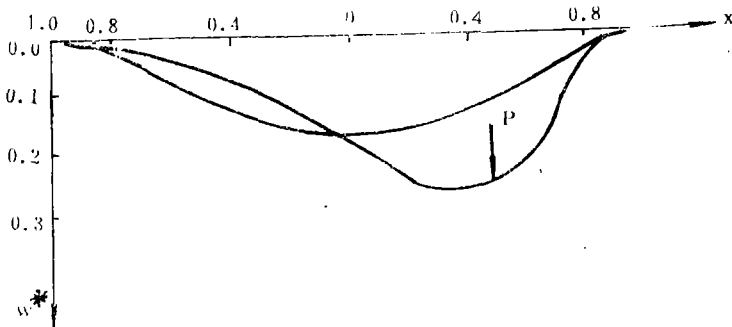


图 3 过集中力作用点 A 直径挠度

对于周边简支的圆板弯曲, 可用上述同样的方法予以解决。

当 $b = 0$ 时, 即集中力 P_z 作用于圆板的中心, 属轴对称弯曲, 考虑到集中力作用点挠度为有限值, 式 (3-9) 中有 $C_{04} = 0$, 余下三个待定系数可分别有边界条件 (二个) 和中心处剪力平衡条件 (一个) 决定。

参 考 文 献

- [1] Reismann, H: Bending of Circular and Ringshaped plates on an elastic foundation, J. Appl. Mech. Trans., ASME, 76, (1954), p. 45~51.
- [2] Frederick, D.: On Some Problem in bending of thick Circular Plates on elastic foundation, J. Appl. Mech. Trans., ASME, 78, (1956), p. 195~200.
- [3] Б. Г. 柯列涅夫著, 立之译:《弹性地基上板和梁计算问题》, 建筑工程出版社 (1958)。
- [4] 卢文达, 王蜀: 双参数地基上受任意荷载的环形基础板,《应用数学和力学》, 8. 9. (1987), p. 771~778。
- [5] Selvadurai, A. P. S.:《土与基础相互作用的弹性分析》, 中国铁道出版社, 1984年。
- [6] В. З. Власов и Н. Н. Леонтьев Валки, Плиты и Ололочки На Упругом Основании Москва 1960
- [7] R. Szilard 著:《板的理论和分析》, 中国铁道出版社, 1984年。

ON THE CIRCULAR PLATES ON TWO-PARAMETERS FOUNDATION UNDER A ECCENTRIC CONCENTRATED LOAD

Wang zhuming

(Xian Institute of Metallurgy and Construction Engineering)

Abstract

A exact solution of nonaxisymmetric bending for the Circular plates on two-Parameters foundation (Pasternak) is obtained in this paper. As a example, the Circular plates under a eccentric concentrated load is studied in detail. Specialization of the solution obtained in this paper gives vlazov's solution in the cases of axisymmetry in Ref[5].