

用权残法构造混合梁元的对称矩阵

李振钱 马文华

(复 旦 大 学)

摘 要

本文采用文献〔5〕的插值函数, 改变权函数的选择, 构造了对称刚度矩阵; 于是, 在计算时可采用对称矩阵的熟悉技巧, 使解题规模得到扩大。如采用通常的有限元装配方法, 可解决梁杆结构问题。从计算的例题看到均有高精度的结果。

一、前 言

在文献〔5〕中, 引入了高精度的形函数, 扩充了梁节点的自由度, 由控制方程得到并不对称的权残法单元刚度阵, 这与固体力学熟知的有限元法比较, 在使用上显得颇感不便。本文继续使用文献〔5〕的插值函数, 来构造对称的单元刚度阵, 写出它的具体形式; 同时计算了考例, 得到满意的结果。对于梁杆结构的问题亦按类似有限元的方法进行装配处理, 并计算了简单刚架问题, 获得高精度的结果。

二、单刚的推导

取节点自由度为

$$\delta_i = [w_i, l\theta_i, M_i l^2/EI, Q_i l^3/EI]^T \quad (i = 1, 2) \quad (1)$$

可见一个梁单元具有8个自由度, 每一自由度采用上述表示后, 它均具有挠度的统一量纲, 引入变换 $\xi = x/l$, 利用七次插值多项式, 经适当运算后〔5〕, 可得如下挠度 w 的插值公式:

$$w(\xi) = N\delta \quad (2)$$

式中〔5〕

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$N_1 = 1 - 35\xi^4 + 84\xi^5 - 70\xi^6 + 20\xi^7$$

$$N_2 = \xi - 20\xi^4 + 45\xi^5 - 36\xi^6 + 10\xi^7$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi^2 - 5\xi^4 + 10\xi^5 - \frac{15}{2}\xi^6 + 2\xi^7$$

$$N_4 = \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{2}{3}\xi^4 + \xi^5 - \frac{2}{3}\xi^6 + \frac{1}{6}\xi^7 \quad (3)$$

$$N_5 = 35\xi^4 - 84\xi^5 + 70\xi^6 - 20\xi^7$$

$$N_6 = -15\xi^4 + 39\xi^5 - 34\xi^6 + 10\xi^7$$

$$N_7 = \frac{5}{2}\xi^4 - 7\xi^5 + \frac{13}{2}\xi^6 - 2\xi^7$$

$$N_8 = \frac{1}{6}\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^5 + \frac{1}{2}\xi^6 - \frac{1}{6}\xi^7$$

以上形函数所构造的解答, 可以对梁单元上具有不超过三次多项式载荷时得到精确值, 不必要叠加固端反力所引起的材料力学解答。

若记上述 w 代入控制方程获得的残数为 R , 则

$$\begin{aligned} R &= \frac{l^4}{24EI} (EI \frac{d^4 w}{dx^4} - q) = \frac{l^4}{24EI} (EI \frac{d^4 N}{dx^4} - q) \\ &= B\delta - ql^4/24EI \end{aligned} \quad (4)$$

式中利用了式 (2), 其中

$$B = \frac{1}{24} \frac{d^4 N}{d\xi^4} = P_3(\xi) C \quad (5)$$

$$P_3(\xi) = [1, \xi, \xi^2, \xi^3] \quad (6)$$

$$C = \begin{bmatrix} -35 & -20 & -5 & -2/3 & 35 & -15 & 2/5 & 1/6 \\ 420 & 225 & 50 & 5 & -420 & 195 & -35 & -\frac{5}{2} \\ -1050 & -540 & -112.5 & -10 & 1050 & -510 & 97.5 & 7.5 \\ 700 & 350 & 70 & 5\frac{5}{6} & -700 & 350 & -70 & 35/9 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, l 为杆长; E 为弹性模量; I 为截面惯矩。采用最小二乘法构造泛函, 得

$$\pi = \int_0^1 R^T R d\xi \quad (8)$$

由驻值条件 $\partial \pi / \partial \delta = 0$, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 B^T (B\delta - ql^4/24EI) d\xi &= \int_0^1 B^T B l d\xi \delta - \int_0^1 B^T (ql^4/24EI) l d\xi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

把式 (5) 代入式 (9), 得到单刚方程为

$$K\delta = P \quad (10)$$

式中

$$P = \int_0^1 C^T P_3^T(\xi) \frac{ql^4}{24EI} l d\xi \quad (11)$$

$$K = \int_0^1 C^T P_3^T(\xi) P_3(\xi) C l d\xi \quad (12)$$

经积分后得 K 的具体形式如下:

$$K = \begin{pmatrix} 2a_1a_2 & a_1a_2 & 84a_1 & 7a_1 & -2a_1a_2 & a_1a_2 & -84a_1 & 7a_1 \\ & 216a_1 & 45a_1 & 3a_2 & -a_1a_2 & 204a_1 & -39a_1 & 3a_1 \\ & & 10a_1 & a_1 & -2a_1a_2 & 39a_1 & -7a_1 & a_1/2 \\ & & & a_2 & -7a_1 & 3a_1 & -a_1/2 & a_1/4 \\ \text{对} & & & & 2a_1a_2 & -a_1a_2 & 84a_1 & -7a_1 \\ \text{称} & & & & & 216a_1 & -45a_1 & 3a_2 \\ & & & & & & 10a_1 & -a_1 \\ & & & & & & & a_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中

$$a_1 = 3150, \quad a_2 = 420$$

当 $q = \text{常数}$ 时, 载荷 P 为

$$P = \frac{q_0 l^4}{4EI} (0, 0, 0, -105, 0, 0, 0, 105)^T \quad (14)$$

在 q 为其它载荷时, 不难由式 (11) 算得 P 。

若单刚的局部坐标的方向与整体系不一致时, 可相仿地进行坐标变换, 于是就得到在总体坐标下的单刚, 然后再按有限元求解结构力学问题的步骤进行组装, 但比时还要引入轴向位移和轴向力的残数〔5〕。

三、考例计算

利用式 (13) 的刚度阵, 对一些简单梁的例子进行考核。

例 1 承受均布载荷的简支梁

作为一个单元, 由于梁两端简支, 于是有在两端处 w 和 M 均为零, 因而去掉上述单刚中的 1、3、5、7 诸行和列, 得单刚和载荷列为

$$K = \begin{pmatrix} 216a_1 & 3a_2 & 204a_1 & 3a_1 \\ & a_2 & 3a_1 & a_2/4 \\ \text{对} & & 216a_1 & 3a_2 \\ \text{称} & & & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680400 & 12600 & 642600 & 9450 \\ & 420 & 9450 & 105 \\ \text{对} & & 680400 & 12600 \\ \text{称} & & & 420 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{q_0 l^4}{4EI} \begin{pmatrix} 0 \\ -105 \\ 0 \\ 105 \end{pmatrix}$$

由

$$K\delta = P$$

即得

$$\theta_1 = -\theta_2 = q_0 l^3 / 24EI, \quad Q_1 = Q_2 = -\frac{1}{2} q_0 l$$

此时梁挠度表达式为

$$w = \frac{q_0 l^4}{24EI} (N_2 - N_6 + N_8 - N_4) = \frac{q_0 l^4}{2EI} \xi (1 - \xi) (1 + \xi - \xi^2)$$

它是精确解。

例2 承受均载的固支梁

仍取作一个单元, 由于梁两端固支, 于是在两端处有 $w = \theta = 0$, 故划去单刚和载荷列的 1、2、5、6 诸行和列, 剩下的矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} 10a_1 a_1 & -7a_1 & a_1/2 \\ a_2 & -2/a_1 & 4/a_2 \\ \text{对} & 10a_1 & -a_1 \\ & \text{称} & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31500 & 3150 & -22050 & 1575 \\ & 420 & -1575 & 105 \\ \text{对} & & 31500 & -3150 \\ & \text{称} & & 420 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{q_0 l^4}{4EI} \begin{bmatrix} 0 \\ -105 \\ 0 \\ 105 \end{bmatrix}$$

解得结果为

$$M_1 = M_2 = \frac{q_0 l^2}{12EI}, \quad Q_2 = -Q_1 = \frac{q_0 l}{2}$$

于是固支梁的挠度表达式为

$$W = \frac{q_0 l^4}{12EI} (N_3 + N_7) + \frac{q_0 l^4}{2EI} (N_8 - N_4) = \frac{q_0 l^4}{24EI} \xi^2 (1 - \xi)^2$$

它也是精确解答;

上述两例中剪力 Q 、弯矩 M , 以及挠度 w 、转角 θ 的记号均同材料力学规定。

例3 简单静不定刚架的分析

如图1所示, 由三根等长均质等截面梁固接而成刚架, 下端均为固支, 而在上面一根横梁上作用着集度为 q_0 的均布载荷, 现把此刚架分成三个梁单元, 对每一单元分别利用式(13)及式(14)形成弯曲刚度阵及右端项, 然后再使用与文献[5]相仿的方法, 形成轴向刚度及载荷阵, 再经坐标变换后, 在总体坐标下装配, 形成系统的总刚和总载荷列阵。最后, 考虑到边界条件, 代入方程组, 求解所得的方程组, 便可得到2号和3号节点的位移和所有四个节点的内力。在计算中选取 $\alpha = 10^6$, 获得的结果见表1, 其中 α 的意义参阅文献[5], $\alpha = Al^2/I$; A 为横截面积; I 为截面惯矩; l 为梁元长度。对高为 h 的矩形梁情形有 $\alpha = \frac{12I^2}{h^2}$, 由此可见, α 是由梁的长高比所调节的参数。 α 对结果的影响列在表

2 中。在表 1 中还列出了解析解和文献〔 3 〕作出的有限元解以资比较, 由对称性只列出第 2 节点的结果。

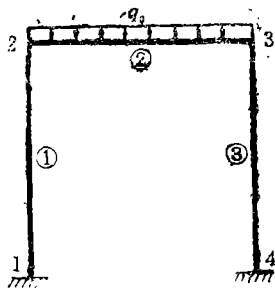


图 1 简单刚架单元划分

表 1 节点二处的位移和应力

	10_2	$Q_2 l^3/EI$	$M_2 l^2/EI$
本文解	0.01389	0.5	-0.05556
有限元解	0.014323	0.375	-0.04944
解析解	0.013889	0.5	-0.05556

表 2 不同值对结果的影响

α	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
10_2	0.02392	0.01711	0.01431	0.01392	0.01389	0.01389	0.01389	0.01389	0.01389	0.01389
$M_2 l^2/EI$	-0.003482	-0.04913	-0.05469	-0.05552	-0.05557	-0.05555	-0.05556	-0.05555	-0.05555	-0.05555
$Q_2 l^3/E$	-0.50026	-0.49997	-0.49988	-0.50009	-0.50005	-0.5000	-0.5000	-0.49999	-0.49999	-0.49999

从表 2 可见, 不同的 α 值影响结果的数值, 但当 $\alpha > 10^3$ 时, 结果趋向于稳定, 当 α 减小时, 刚度增大, 因此弯矩减小, 这就是本文考虑到轴力影响对结果带来的好处。

四、结论与分析

本文采用最小二乘加权残数有限元法, 很大程度地简代了文献〔 5 〕的公式, 同时也大大简化了计算的工作量, 节约计算费用。从计算的例题可以看出, 本文的方法具有很高的精度, 为梁杆结构系统的分析计算提供了一种良好的方法, 它和文献〔 5 〕的方法一样, 对不超过三次的横向载荷情形均能提供与解析解一致的结果。

参考文献

- [1] J. S. Przemieniecki, Theory of Structural Analysis, McGRAW-HILL, 1968. (中译本, 王德荣等译, 国防工业出版社。)
- [2] S. S. Rao, The Finite Element Method in Engineering, Pergamon Press, 1982。
- [3] 北方交通大学铁道建筑系编, 结构矩阵分析, 中国建筑工业出版社, 1975年。
- [4] 徐次达, 加权残数法解固体力学问题, 力学与实践, 1984年第4期。
- [5] 马文华, 李振钱, 用权残法构造梁混合元的方法, 工程力学, 1986年第4期。

THE SYMMETRY MATRIX OF THE MIXED BEAM ELEMENT CONSTRUCTED WITH WEIGHTED RESIDUAL METHOD

Li Zhenpian Ma Weuhua

(Fudan University)

Abstract

In this paper, the symmetry matrix has been constructed by the use of the paper [5] with the change of the selected weighted Functions, so the familiar technique of the symmetry matrix can be applied, and the solved scope can be expanded. It can solve the problems of the system with the bars and beams. If the assembling methods are used. The good precision results are obtained for examples.

第二届全国青年力学协会将于1988年8月在湖南举行

第二届全国青年力学协会年会将于1988年8月22~26日在湖南省举行, 现在开始征稿。

参加会议的学术论文, 至少应在思想、方法、结果等一个方面有所创新, 且未在公开刊物上发表过。力学各分支均可作为讨论内容。会议将鼓励新兴学科和国内薄弱分支学科的研究工作, 优先录用交叉学科的论文。征稿截止日期为1988年4月10日(以寄信邮戳为准)。

联系人: 100080 北京市中关村中科院力学所博士生于欣

(本刊记者)