

# 高耸结构动力分析的边值法

李 延 和

(江苏省建筑科学研究所)

## 提 要

本文将结构分析的边值法<sup>[1]</sup>用于高耸结构动力分析, 导出了动力分析的边值法方程和频率方程, 建立了一套求频率和振型的程序。

此外, 本文方法对计算结果还具有自动校核功能, 这一点是普通方法所难以做到的。

## 一、 引 言

边值法作为结构分析的通法, 这已被文献<sup>[1]</sup>中大量实例所证实。本文将边值法用于高耸结构动力分析得到了较满意的结果。

边值法进行结构分析的思路为将结构划分为许多单元, 建立这些单元两边物理量的线性变换关系, 运用递推的手法建立起结构分析的边值法方程。利用结构系统的边界条件求解边值法方程并进行回代计算即可求出所有的解, 本文遵照这一思路, 导得了进行高耸结构动力分析的边值法方程和频率方程, 建立了一套求振型的固定程序, 方法规整简洁, 不须逐个计算单元的刚度系数及进行高阶行列式展开。这对于手算或者是微型计算机均非常有利。

另外, 本文所得的高耸结构动力分析的边值法方程与文献<sup>[1]</sup>中的弹性支撑连续梁静力分析的边值法方程极其类同, 这一点是颇为耐人寻味的, 充分说明了边值法<sup>[1]</sup>作为结构分析的一个通法, 不仅能将结构分析的静定与超静力强度与刚度统一于一组边值法方程之中, 而且还能将结构动力分析统一于同一组边值法方程之中。

## 二、 动力分析的边值法方程

众所周知, 对于塔桅、烟囱等, 进行动力分析时可忽略其剪切变形对结构的影响而仅考虑其弯曲储能, 则其计算简图如图1所示。

图2所示为图1中取出的第*i*段梁单元, 图示梁端的内力及位移方向为本文所规定的内力位移的E号方向。

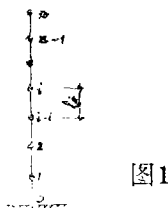


图 1

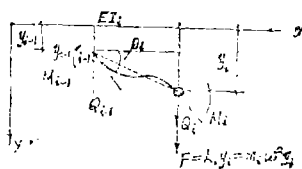


图 2

由单元静力平衡方程得:

$$\begin{Bmatrix} Q_{i-1} \\ M_{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i + k_i y_i \\ M_i \end{Bmatrix}$$

即:

$$\begin{Bmatrix} Q_{i-1} \\ M_{i-1} \end{Bmatrix} = \bar{A}_{i+i} \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} + \bar{D}_{i+i} \begin{Bmatrix} Q_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中:

$$\bar{A}_{i+i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_{i+i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_i \\ 0 & k_i l_i \end{bmatrix}$$

另一方面, 由梁变形的初参数方程可得单元二边力学量之间的关系为:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{i-1} \\ y_{i-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i}{EI_i} \\ \frac{l_i^2}{6EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i + k_i y_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i}{EI_i} \\ \frac{l_i^3}{6EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{i-1} \\ y_{i-1} \end{Bmatrix} = \bar{B}_{i-1-i} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \bar{C}_{i-1-i} \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{B}_{i-1-i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i}{EI_i} \\ \frac{l_i^3}{6EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & k_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_i \frac{l_i^3}{2EI_i} \\ l_i & 1 + k_i \frac{l_i^3}{6EI_i} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{i-1-i} = \begin{bmatrix} \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i}{EI_i} \\ \frac{l_i^3}{6EI_i} & \frac{l_i^2}{2EI_i} \end{bmatrix}$$

式(1)、(2)建立了单元二端物理量的线性变换关系。

以结构体系第一个节点的位移向量为基准, 运用式(1)、式(2), 反复递推到最后一个结点n为止, 则可得到关于位移向量之间的下列递推关系:

$$\begin{Bmatrix} \theta_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \bar{B}_{01} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{01} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix}$$

$$= \bar{B}_{01} \left( \bar{B}_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \right) + \bar{C}_{01} \left( \bar{A}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \bar{B}_{02} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{02} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

(其中:  $\bar{B}_{02} = \bar{B}_{01} \bar{B}_{12} + \bar{C}_{02} \bar{C}_{12}$ ;  $\bar{C}_{02} = \bar{B}_{01} \bar{C}_{12} + \bar{C}_{01} \bar{A}_{12}$ )

$$= \bar{B}_{02} \begin{pmatrix} \bar{B}_{23} & \theta_3 \\ & y_3 \end{pmatrix} + \bar{C}_{23} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{02} \begin{pmatrix} \bar{A}_{23} & Q_3 \\ & M_3 \end{pmatrix} + \bar{D}_{23} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \bar{B}_{03} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{03} \begin{Bmatrix} Q_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

(其中  $\bar{B}_{03} = \bar{B}_{02} \bar{B}_{23} + \bar{C}_{02} \bar{C}_{23}$ ;  $\bar{C}_{03} = \bar{B}_{02} \bar{C}_{23} + \bar{C}_{02} \bar{A}_{23}$ )

= .....

$$= \bar{B}_{0n} \begin{Bmatrix} \theta_n \\ y_n \end{Bmatrix} + \bar{C}_{0n} \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \end{Bmatrix} \quad (3)$$

其中:  $\bar{B}_{0n} = \bar{B}_{0n-1} \bar{B}_{n-1n} + \bar{C}_{0n-1} \bar{D}_{n-1n}$

$$\bar{C}_{0n} = \bar{B}_{0n-1} \bar{C}_{n-1n} + \bar{C}_{0n-1} \bar{A}_{n-1n}$$

将式(3)进行移项整理得:

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \bar{B}_{0n} \begin{pmatrix} Q_n \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{C}_{0n} \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (4)$$

其中系数矩阵计算公式:

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_{0i} \\ \bar{C}_{0i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{0i-1} \\ \bar{C}_{0i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{B}_{i-1i} & \bar{C}_{i-1i} \\ \bar{D}_{i-1i} & \bar{A}_{i-1i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)即为高耸结构动力分析的“位移边值方程”

类似的,我们以第一结点的内力向量为基准,仍用式(1)(2)反复递推到最后一结点  $n$  为止得:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{pmatrix} &= \bar{A}_{01} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{01} \begin{Bmatrix} 0 \\ y_1 \end{Bmatrix} \\ &= \bar{A}_{01} \left( \bar{A}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{01} \left( \bar{B}_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \right) \right) \\ &= \bar{A}_{02} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{02} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

(其中:  $\bar{A}_{02} = \bar{A}_{12} \bar{A}_{01} + \bar{D}_{01} \bar{C}_{12}$ ;  $\bar{D}_{02} = \bar{D}_{01} \bar{B}_{12} + \bar{A}_{01} \bar{D}_{12}$ )

= .....

$$= A_{on} \begin{Bmatrix} Q_o \\ M_o \end{Bmatrix} + \bar{D}_{on} \begin{Bmatrix} \theta_o \\ y_o \end{Bmatrix} \quad (6)$$

(其中:  $A_{on} = A_{on-1} A_{n-1n} + D_{on-1} \bar{C}_{n-1n}$ ;

$$D_n = A_{on-1} D_{n-1n} + \bar{D}_{on-1} B_{n-1n})$$

将式(6)移项整理得:

$$\begin{Bmatrix} Q_o \\ M_o \end{Bmatrix} - A_{on} \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \end{Bmatrix} + \bar{D}_{on} \begin{Bmatrix} \theta_n \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

其中系数计算公式:

$$\left\| A_{on} \right\| \left\| \bar{D}_{on} \right\| = \left\| A_{on-1} \right\| \left\| D_{n-1n} \right\| \cdot \left\| \frac{A_{n-1n}}{\bar{C}_{n-1n}} \right\| \left\| \frac{D_{n-1n}}{B_{n-1n}} \right\| \quad (8)$$

式(7)即为高耸结构动力分析的“内力边值方程”。

有了式(4)、式(7)运用结构体系的边界条件我们即可建立频率方程。现我们对图1所示情况将边界条件代入求出其频率方程。其它边界条件情况则依此类推。

对图1所示的高耸结构其边界条件为:

$$\begin{Bmatrix} \theta_o \\ y_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_o \\ M_o \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_n \\ y_n \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} Q_n \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

将之代入式(4)之中得:

$$-B_{on} \begin{Bmatrix} \theta_n \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} \theta_n \\ y_n \end{Bmatrix} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore |B_{on}| = 0 \quad (10)$$

该式即为频率方程,若将此行列式(二阶行列式)展开,则可得出关于 $\omega^2$ 的n次代数方程,解之即可得出所有的频率。有了频率值之后,可建立 $\bar{B}_{on}$ 矩阵,运用式(9)并假设 $y_n=1$ ,则可求出 $\theta_n$ 。进而交替运用式(1)、式(2)回代就可求出各节点的位移值,最后将各振型求出。

由式(9)推导可知,对于图1所示的这类柱脚固定的高耸结构,只须运用位移边值方程(式4)即可求出频率方程,内力边值方程只起到校核作用。

另外,在上述回代过程中,用回代到最后一节点时所得的值与已知边界条件值比较,若相等,则计算过程无误,反之,则计算有误。边值法具有自动校核功能,而其它方法要进行校核时

得另寻办法。

### 三、解题程序及计算实例

用本文方法进行高耸结构动力分析的程序如下:

(1)、计算各单元的变换矩阵  $\bar{A}_{i-1,i}$ ,  $\bar{B}_{i-1,i}$ ,  $\bar{C}_{i-1,i}$ ,  $\bar{D}_{i-1,i}$ , 及  $\bar{B}_0$ ,  $\bar{C}_0$ , 当各单元完全相同时  $\bar{A}_{0,1} = \bar{A}_{1,2} = \bar{A}_{2,3} = \dots = \bar{A}_{i-1,i}$ ;  $\bar{B}_{0,1} = \bar{B}_{1,2} = \bar{B}_{2,3} = \bar{B}_{i-1,i}$ ;  $\bar{C}_{0,1} = \bar{C}_{1,2} = \bar{C}_{2,3} = \bar{C}_{i-1,i}$ ;  $\bar{D}_{0,1} = \bar{D}_{1,2} = \bar{D}_{2,3} = \bar{D}_{i-1,i}$ 。

(2) 运用式 (10) 展开此二阶行列式, 求解此代数方程。得出  $\omega^2$  的各组解。(因系数矩阵  $\bar{B}_{i-1,i}$ ,  $\bar{D}_{i-1,i}$ , 及频率方程中  $k_i = m_i \omega^2$ )

(3) 对应于每一组  $\omega^2$  的解, 代入式 (9) 并令  $y_n = 1$ , 则解出  $\theta$ 。然后运用式 (1) (2) 即可将各节点的位移求出。

(4) 绘制各振型图:

例题: 求如图3所示三个自由度结构的自振频率和振型。

$$\text{解: } \bar{A}_{0,1} = \bar{A}_{1,2} = \bar{A}_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{vmatrix}$$

$$\bar{B}_{0,1} = \bar{A}_{1,2} = \bar{B}_{2,3} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{kl^2}{2EI} \\ l & k \frac{l^3}{6EI} \end{vmatrix}$$

$$\bar{D}_{0,1} = \bar{D}_{1,2} = \bar{D}_{2,3} = \begin{vmatrix} 0 & k \\ 0 & kl \end{vmatrix}$$

$$\text{则: } \bar{B}_{0,2} = \begin{vmatrix} 1 + k \frac{l^3}{2EI} & \frac{5kl^2}{2EI} + k \frac{2l^4}{12(EI)^2} \\ 2l + k \frac{l^4}{6EI} & 1 + \frac{3kl^2}{2EI} + k \frac{2l^2}{36(EI)^2} \end{vmatrix}$$

$$\bar{C}_{0,2} = \bar{B}_{0,1} \bar{C}_{1,2} + \bar{C}_{0,1} \bar{A}_{1,2}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2l^2}{EI} + k \frac{l^5}{12(EI)^2} & \frac{2l}{EI} + k \frac{l^4}{4(EI)^2} \\ \frac{4l^2}{3EI} + k \frac{l^5}{36(EI)^2} & \frac{2l^2}{EI} + k \frac{l^5}{12(EI)^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{则: } \bar{B}_{0,3} = \bar{B}_{0,2} \bar{B}_{2,3} + \bar{C}_{0,2} \bar{D}_{2,3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + k \frac{l^3}{2EI} & \frac{5kl^2}{2EI} + k \frac{l^4}{12(EI)^2} \\ 2l + k \frac{l^4}{6EI} & 1 + 3 \frac{kl^3}{2EI} + k \frac{l^5}{36(EI)^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \frac{l^2}{2EI} \\ l & 1 + k \frac{l^3}{6EI} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
 2\frac{l^2}{EI} + k\frac{l^6}{12(EI)^2} & \frac{2l}{EI} + k\frac{l^4}{4(EI)^2} \\
 + \frac{4l^2}{3EI} + k\frac{l^6}{36(EI)^2} & \frac{2l^2}{EI} + k\frac{l^6}{12(EI)^2} \\
 1 + 3x + \frac{x^2}{12} & \frac{7x}{l} + \frac{13x^2}{12l} + \frac{x^3}{72l} \\
 3l + \frac{5l}{3}x + \frac{l x^2}{36} & 1 + 6x + \frac{17}{36}x^2 + \frac{x^3}{216}
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k \\ 0 & kl \end{vmatrix}$$

其中  $x = k \frac{l^3}{EI} = m \omega^2 \frac{l^3}{EI}$ , 代入  $B_{03} = 0$  中, 展开此二阶行列式整理得方程:

$$1 - 12x + \frac{131}{36}x^2 - \frac{13}{108}x^3 = 0$$

解得:

$$x_1 = 0.085592, \quad x_2 = 3.66748, \quad x_3 = 26.54867$$

则得:

$$\omega_1 = \sqrt{0.085592 \frac{EI}{ml^3}} = 0.29256 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (\text{第一频率})$$

$$\omega_2 = \sqrt{3.66748 \frac{EI}{ml^3}} = 1.915067 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (\text{第二频率})$$

$$\omega_3 = \sqrt{26.54867 \frac{EI}{ml^3}} = 5.15254 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (\text{第三频率})$$

为了便于计算振型、我们令:

$$m=1, \quad l=1, \quad EI=1, \quad \text{则 } x = m \omega^2 \frac{l^3}{EI} = \omega^2 = k$$

结构自振频率为:

$$\omega_1 = 0.29256, \quad \omega_2 = 1.915007, \quad \omega_3 = 5.15254,$$

$$\text{相应于 } \omega_1, \quad k = \omega_1^2 = 0.085592$$

有关变换矩阵化为:

$$A_{01} = A_{12} = A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{B}_{01} \bar{B}_{12} \bar{B}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0.042796 \\ 1 & 1.014265 \end{vmatrix}$$

$$\bar{C}_{01} = \bar{C}_{12} = \bar{C}_{23} = \begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$$\bar{D}_{01} = \bar{D}_{12} = \bar{D}_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 0.085592 \\ 0 & 0.085592 \end{vmatrix}$$

$$\bar{B}_{03} = \begin{bmatrix} 1.25739 & 0.60708 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } y_3 = 1, \text{ 由 } \bar{B}_{03} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ 解得}$$

$$\theta_3 = -\frac{0.60708}{1.25739} \times y_3 = -0.48281$$

运用式(2)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} &= B_{23} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} + C_{23} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.085592 \\ 0 & 0.085592 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.48281 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.085592 \\ 0.085592 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

又运用式(2)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} &= B_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + C_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.042796 \\ 1 & 1.014265 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.44 \\ 0.531455 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.085592 \\ 0.085592 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -0.417256 \\ 0.099036 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.128388 \\ 0.0570616 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.288868 \\ 0.1560976 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

运用式(1)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} &= \bar{A}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \bar{D}_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.085592 \\ 0.085592 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.085592 \\ 0 & 0.085592 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.44 \\ 0.531455 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0.13108 \\ 0.216672 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

运用式(2)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} &= \bar{B}_{01} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + C_{01} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.042796 \\ 1 & 1.014265 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.288868 \\ 0.1560976 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.13108 \\ 0.216672 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -0.000032 \\ -0.000316 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

计算结果满足边界条件,说明本计算无误;

第一振型如图所示:

相应于 $\omega_2^2$ ,  $k = \omega_2^2 = 3.66748$ 有关变换矩阵化为:

$$\begin{aligned} A_{01} = A_{12} = A_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & B_{01} = B_{12} = B_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 1.83374 \\ 1 & 1.0112467 \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_{01} = \bar{C}_{12} = \bar{C}_{23} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}; & D_{01} = D_{12} = D_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 3.66748 \\ 0 & 3.66748 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B_{03} = \begin{bmatrix} 13.1233 & 40.928 \\ \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } y_3 = 1, \text{ 由 } B_{03} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

解得:

$$\theta_3 = -\frac{40.9287}{13.1233} y_3 = -3.11878$$

运用式(2)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} &= B_{23} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \bar{C}_{23} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1.83374 \\ 1 & 1.6112467 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3.11878 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.28504 \\ -1.507533 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

运用式(1)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} &= A_{23} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + D_{23} \begin{Bmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3.66748 \\ 0 & 3.66748 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3.11878 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.66748 \\ 3.66748 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

又运用式(2)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} &= B_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \bar{C}_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1.83374 \\ 1 & 1.6112467 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.285041 \\ -1.507533 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3.66748 \\ 3.66748 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 1.45176 \\ -1.269048 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

运用式(1)得:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} = A_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + D_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.66748 \\ 1 & 1 & 3.66748 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3.66748 \\ 0 & 3.66748 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.285041 \\ -1.507533 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.86136 \\ 1.806113 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = B_{01} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_{01} \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1.83374 \\ 1 & 1.6112467 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.45176 \\ -1.269048 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.86136 \\ 1.806113 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.000093 \\ -0.000165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

计算结果满足边界条件,说明本计算过程无误。

第二振型如图所示

相应于 $\omega_3$ ,  $k=\omega_3^2=26.54867$ , 有关的变换矩阵可化为:

$$\bar{A}_{01}=\bar{A}_{12}=\bar{A}_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \bar{B}_{01}=\bar{B}_{12}=\bar{B}_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 13.274335 \\ 1 & 5.424778 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{01}=\bar{C}_{12}=\bar{C}_{23}=\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix}; \bar{D}_{01}=\bar{D}_{12}=\bar{D}_{23}=\begin{bmatrix} 0 & 26.54867 \\ 0 & 26.54867 \end{bmatrix}$$

$$\bar{E}_{03}=\begin{bmatrix} 139.382 & 1209.3023 \\ \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\text{令 } y_3=1, \text{ 由 } \bar{B}_{03} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 解得:}$$

$$\theta_3 = -\frac{1209.3023}{139.3823} y_3 = -8.676173$$

运用式(2)得,

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \bar{B}_{23} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \bar{C}_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 13.274335 \\ 1 & 5.424778 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -8.676173 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.598162 \\ -3.251395 \end{pmatrix}$$

运用式(1)得:

$$\begin{pmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \bar{A}_{23} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{D}_{23} \begin{pmatrix} \theta_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 26.54867 \\ 0 & 26.54867 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.676173 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.54867 \\ 26.54867 \end{bmatrix}$$

运用式(2)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} &= B_{12} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + C_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 13.274335 \\ 1 & 5.424778 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.598162 \\ -3.251395 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.54867 \\ 26.54867 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.26074 \\ 4.659266 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

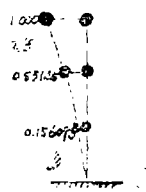
运用式(1)得

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} &= A_{12} \begin{Bmatrix} Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + D_{23} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.54867 \\ 26.54867 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 26.54867 \\ 0 & 26.54867 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.598162 \\ -3.251395 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -59.77154 \\ -33.2229 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

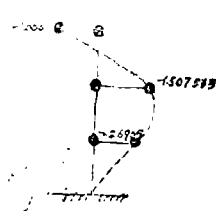
运用式(2)得:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} &= B_{01} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + C_{01} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 13.274335 \\ 1 & 5.424778 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.26074 \\ 4.659266 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.16667 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -59.77154 \\ -33.2229 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.00072 \\ 0.037 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

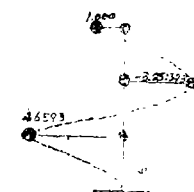
计算结果满足边界条件,说明本计算过程无误。



第一主振型



第二主振型



第三主振型

#### 四、结 语

1、本文讨论的边值法对端部为任意约束条件的情况下均适用,而且解题程序均相同

对于图1所示的柱脚为固定的情况, 两类边值方程并不偶连。仅求位移边值方程即可得出频率方程

$|B_{0n}| = 0$ , 矩阵  $B_{0n}$  的计算是一系列规则的二维矩阵的乘积而且最后进行的是二阶行列式的展开, 克服了常规做法须求各杆件单元的刚度K以及高阶行列式展开的困难。

2、通过频率方程将各频率求出后, 只要交替使用式(1)或(2)回代计算各终点位移值, 则振型计算非常简便。同时, 回代计算至最后结点的  $\begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix}$  时, 若  $\begin{Bmatrix} 0 \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ ,

则满足边界条件表明计算无误, 否则计算有误。由此可见本法对计算过程具有自动校核的功能, 这是一般的方法所难做到的。

3、本文所求得的高耸结构动力分析的边值方程与文献<sup>[1]</sup>的弹性支撑连续梁静力分析的边值法方程极其类同。表面上看, 高耸结构动力分析与弹性支撑连续梁静力分析性质完全不同。而实际上, 只要将动力分析中的惯性力  $F_i = m_i \ddot{y}_i$  看成与弹性支撑连续梁的支撑反力相等效, 并且取弹性支撑连续梁的外荷载为零, 则两类问题分析时所取的计算单元的受力状态是完全相同的。如果将文献<sup>[1]</sup>的弹性支撑连续梁的静力分析按本文步骤推导, 所取得的边值方程及变换矩阵一定与本文结果相同(弹性支撑连续梁取荷载项为零)。边值法第一次充分揭示了这两类问题的内在联系, 将这两类问题的计算成功地统一在同一组边值法方程之中。

### 参 考 文 献

- [1] 吕子华: 《边值法》, 安徽土木工程学会 1980.5  
 [2] 王光远: 《建筑结构的振动》, 中国工业出版社

## BOUNDARY VALUE METHOD OF DYNAMIC ANALYSIS OF TOWERING STRUCTURES

Li Yanhe

(Jiang Su Building Research Institute)

### Abstract

In this paper, boundary value method is used for dynamic analysis of towering structures. The boundary value equation and the frequency equation of dynamic analysis have been derived and a set regularized program of the calculation has been set up for calculating eigenvalues and eigenvectors.

In addition, this method has function that the results.