

应用变分法分析斜放四角锥体网架

曹 希 春

(陕西省建筑设计院)

摘 要

本文将斜放四角锥体网架连续化, 视为连续的弹性体。试函数选用了满足边界条件的双重简支梁函数, 其解答简单实用。

分 析 方 法

我们以图1示意斜放四角锥体网架平面。设其上受均布载荷为 q , 其挠度为 $W(x, y)$ 方向的每榀弯矩为 $M(x, y)$, y 方向的每榀弯矩为 $\bar{M}(x, y)$ 。

当取 $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$ 时, 有:

$$M(x, y) = \bar{M}(x, y) \quad (1)$$

将网架连续化处理后, 可近似地求得以下两个微分方程:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -2\lambda q \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -(AM + Bq) \quad (3)$$

$$\text{式中: } A = \frac{1}{2Eh^2\lambda} \left(-\frac{S_1^3}{A_1\lambda^2} + \frac{2S_3}{A_3} \right)$$

$$B = \frac{1}{2Eh^2} \left(-\frac{S_1^3}{A_1} + \frac{4S_2^3}{A_2} - \frac{2S_3\lambda^2}{A_3} \right)$$

A_1, S_1 为上弦杆的面积和长度;

A_2, S_2 为斜杆的面积和长度;

A_3, S_3 为下弦杆的面积和长度;

E 为材料的弹性模量。

采用变分法求解时, 首先引入下列关系:

$$M(x, y) = 2\lambda m(x, y) \quad (4)$$

式中: $m(x, y)$ 表示单位宽度上的弯矩。

将式(4)代入式(2)和式(3)内得:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = -q \quad (2a)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -(2\lambda A m + Bq) \quad (3a)$$

据变分法理论, 式(2a)和式(3a)是泛函:

$$I_m = \iint_F \left[\left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y} \right)^2 - 2mq \right] dx dy \quad (5)$$

$$I_w = \iint_F \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + 2Wf(x, y) \right] dx dy \quad (6)$$

实现极值时的奥氏方程。

式中: $f(x, y) = -(2\lambda A m + Bq)$ 。

众所周知, 泛函实现极值的必要条件是: $\delta I_m = 0$ 和 $\delta I_w = 0$, 如果所选择的试函数能预先满足几何和静力的边界条件时, 可求得该问题的著名的伽辽金变分方程:

$$\delta I_m = \iint_F \left[\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + q \right] \delta m dx dy = 0 \quad (7)$$

$$\delta I_w = \iint_F \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - f(x, y) \right] \delta W dx dy = 0 \quad (8)$$

在求解时, 采用式(5)和式(6)或采用式(7)和式(8)均可。应用式(5)和式(6)时, 先求 I_m 和 I_w , 再根据 $\frac{\partial I_m}{\partial \alpha_i} = 0$ 和 $\frac{\partial I_w}{\partial \beta_i} = 0$ 求待定系数 α_i 和 β_i ; 应用式

(7)和式(8)时, 可直接代入求待定系数。

在我们的问题中, 为使解答既满足精度要求又力求简单, 故选择双重简支梁函数求解, 并利用网架的对称性。设:

$$m(x, y) = \alpha_1 \left(4x^2 - l_1^2 \right) \left(4y^2 - l_2^2 \right) \quad (9)$$

$$W(x, y) = \beta_1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{l_1^2 x^2}{2} + \frac{5l_1^4}{48} \right) \left(\frac{y^4}{3} - \frac{l_2^2 y^2}{2} + \frac{5l_2^4}{48} \right) \quad (10)$$

式中: α_1 和 β_1 为待定系数。

将式(9)和式(10)逐次微分后代入式(5)和式(6)内,求得两个待定系数为

$$\alpha_1 = \frac{5q}{32(l_1^2 + l_2^2)} \quad (11)$$

$$\beta_1 = \frac{15.08q}{l_1^2 l_2^2 (l_1^2 + l_2^2)} \left(\frac{\lambda A n}{4.88} + B \right) \quad (12)$$

式中: $n = \frac{l_1^2 l_2^2}{l_1^2 + l_2^2}$

最终求得内力如下:

弯矩:

$$M = \bar{M} = \frac{5\lambda q}{16(l_1^2 + l_2^2)} (4x^2 - l_1^2) (4y^2 - l_2^2) \quad (13)$$

切力:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{5\lambda q}{2(l_1^2 + l_2^2)} \cdot x (4y^2 - l_2^2) \\ Q_y &= \frac{5\lambda q}{2(l_1^2 + l_2^2)} \cdot (4x^2 - l_1^2) y \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

切力的正负规定同材料力学。

挠度:

$$W = \frac{15.08q}{l_1^2 l_2^2 (l_1^2 + l_2^2)} \left(\frac{\lambda A n}{4.88} + B \right) \left(\frac{x^4}{3} - \frac{l_1^2 x^2}{2} + \frac{5l_1^4}{48} \right) \left(\frac{y^4}{3} - \frac{l_2^2 y^2}{2} + \frac{5l_2^4}{48} \right) \quad (15)$$

最大挠度 ($x = y = 0$):

$$W_{max} = \frac{nq}{6.113} \left(\frac{\lambda A n}{4.88} + B \right) \quad (16)$$

应该指出,由于所选择的试函数高阶接近度较差些,所求得的最大切力值略偏小。为使分析结果更完善,按本文方法计算切力时可引入以下的修正系数:

$$\xi = \frac{l_1 l_2 q}{\varphi Q ds} = 1.2 \quad (17)$$

式中分母项表示切力沿周界的积分。

应用式(14)计算的切力值宜乘上修正系数1.2。

算 例

我们以图 1 为例。并设：

$$q = 100 \text{ kg/m}^2, \quad E = 2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2.$$

$$l_1 = 14.84 \text{ m}; \quad l_2 = 23.32 \text{ m}.$$

$$2\lambda_x = 2\lambda_y = 2\lambda = 2.12 \text{ m}.$$

$$h = 1.0 \text{ m}.$$

$$S_1 = 1.50 \text{ m}; \quad A_1 = 2.33 \text{ cm}^2.$$

$$S_2 = 1.457 \text{ m}; \quad A_2 = 1.815 \text{ cm}^2.$$

$$S_3 = 2.12 \text{ m}; \quad A_3 = 2.33 \text{ cm}^2.$$

计算结果以及其它方法计算值比较详见表 1。

表 1

内 容 \ 方 法	本 文 方 法	三角级数解	电子计算机解
M_{max}	5192kg-m	4720kg-m	4905kg-m
W_{max}	6.300cm	6.300cm	6.358cm

参 考 文 献

- [1] Л.Э.艾利斯哥尔兹:《变分法》,李世晋译,高等教育出版社出版 1958年
- [2] 钱伟长:《变分法及有限元》,科学出版社出版 1980年
- [3] 刘锡良,刘毅轩:《平板网架设计》,中国建筑工业出版社出版 1979年