第4卷 第3期 工 程 力 学 Vol.4, №.3
1987年8月 Engineering Mechanics Aug.1987

多参数变分原理及其在梁板单元中的应用

仝 立 勇

(北京航空学院)

摘 要

本文基于能量这个基本概念，获得了适用于线性和非线性弹性力学的多参数变分原理集合 V_R。并且，研究了它在Timoshenko梁和Mindlin板有限元分析中的应用，数值结果表明：适当地选取变分原理中的某个参数不仅可以改善单元的收敛性，并且还可以克服"剪切自锁"引起的困难。

前 言

弹性力学中最先得到发展的是最小势能和最小余能原理。Heuinger (1914)和E、Reissner[1]先后提出了以位移和应力为独立变分宗量的 Hellinger-Reissner 变分原理。胡海昌教授[2]和鹫津久一郎[3]亦先后提出了胡海昌-鹫津久一郎变分原理。

近年来，文献[4]～[8]进一步研究了弹性力学中的变分原理。钱伟长教授[8]提出并采用高阶拉格朗日乘子法，给出了具有任意参数的变分原理。胡海昌教授[6]和罗恩[7]用线性组合法获得了带参数的变分原理。

本文从能量这个基本概念出发，用参数变易法，推导出弹性力学中较为一般的多参数变分原理的泛函。文中的部分泛函与文献[6]、[7]的等价。而且，文中研究了泛函Π_{L1}在有限元分析中的应用，指出恰当选取某个参数，可以改善单元性质，并且克服 Trmoshenko 梁和Mindlin 板中“剪切自锁”引起的困难。

一、弹性静力学问题的描述

设有一个弹性体V，其体内作用体积力f_i。V的边界面为S，且$S=S_u+S_p$，其中S_u为已知边界位移$\overline{u}_i$的边界面部分，S_p为受已知力$\overline{p}_i$作用的边界面部分。则有

(1) 静力平衡方程：

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \qquad (在V内) \qquad (1.1)$$

(2) 应变位移关系：

$$e_{ij}-\tfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \qquad (在V内) \qquad (1.2)$$

本文于1986年9月收到

(3) 应力应变关系：

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\text{或}e_{ij}=\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (1.3\text{a,b})$$

式中A和B分别为应变能和余能密度。

(4) 外力已知的边界条件：

$$\sigma_{ij}n_j-\overline{p}_i=0 \qquad (\text{在}S_p\text{上}) \qquad (1.4)$$

(5) 位移已知的边界条件：

$$u_i-\overline{u}_i=0 \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \qquad (1.5)$$

(符号与文献[5]相同) 式 (1.1) ～ (1.5) 构成了弹性静力学的边值问题。为了以后书写方便，省略各式中各量的下标，并记

$$D\sigma\equiv\sigma_{ij;j},\quad Du\equiv\frac{1}{2}(u_{i;j}+u_{j;i})$$

$$D_n\sigma\equiv\sigma_{ij}n_j$$

二、参数变易法及弹性力学中的多参数变分原理

我们分别考虑非线性与线性弹性本构关系两种情形。

1. 非线性弹性本构关系

在弹性体V内，应力、应变和应变能、余能密度分别可以用三类场函数表示。若记

$$\frac{\partial A}{\partial e}\equiv\frac{\partial A(e)}{\partial e},\quad \frac{\partial A}{\partial u}\equiv\frac{\partial A(Du)}{\partial(Du)}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \sigma}\equiv\partial A\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right)\Big/\partial\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right),\quad \frac{\partial B}{\partial \sigma}\equiv\frac{\partial B(\sigma)}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial B}{\partial e}\equiv\partial B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\Big/\partial\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right),\quad \frac{\partial B}{\partial u}\equiv\partial B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\Big/\partial\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)$$

则

(1) 应力的可能表达式：

$$\sigma\text{——}\frac{\partial A}{\partial e}\text{——}\frac{\partial A}{\partial u} \qquad (2.1)$$

(2) 应变的可能表达式：

$$e\text{——}\frac{\partial B}{\partial \sigma}\text{——}Du \qquad (2.2)$$

(3) 应变能密度的可能表达式：

$$A(e)\text{——}A(Du)\text{——}A\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma}\right) \qquad (2.3)$$

(4) 余能密度的可能表达式：

$$B(\sigma)——B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)—— B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) \tag{2.4}$$

设K_i（$i=1, 2, \cdots, 19$）为不全为零的任意可调参数。组合式（2.1）和（2.2），并考虑式（2.3）和（2.4），我们有

$$\begin{aligned}\Pi=&\iiint_V[K_1\sigma e+K_2\sigma\frac{\partial B}{\partial\sigma}+K_3\sigma DU+K_4\frac{\partial A}{\partial e}e\\&+K_5\frac{\partial A}{\partial e}\frac{\partial B}{\partial\sigma}+K_6\frac{\partial A}{\partial e}Du+K_7\frac{\partial A}{\partial u}e+K_8\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial\sigma}\\&+K_9\frac{\partial A}{\partial u}Du+K_{10}A(e)+K_{11}B(\sigma)+K_{12}A(Du)+K_{13}A\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right)\\&+K_{14}B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)+K_{15}B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)-fu]dV+\iint_{S_p}K_{16}\overline{P}uds\\&+\iint_{S_u}(u-\overline{u})D_u\left(K_{17}\sigma+K_{18}\frac{\partial A}{\partial e}+K_{19}\frac{\partial A}{\partial u}\right)dS\end{aligned} \tag{2.5}$$

若设σ、e、u为独立变分宗量，则令上式变分为零得：

$$\begin{aligned}&K_1\sigma+(K_4+K_{10})\frac{\partial A}{\partial e}+K_7\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial^2 A}{\partial e^2}\left(K_4e+K_5\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right.\\&\left.+K_6Du+K_{14}\frac{\partial B}{\partial e}\right)=0 \qquad (\text{在}V\text{内})\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&K_1e+(K_2+K_{11})\frac{\partial B}{\partial\sigma}+K_3Du+\frac{\partial^2 B}{\partial\sigma^2}\left(K_5\frac{\partial A}{\partial e}+K_2\sigma\right.\\&\left.+K_8\frac{\partial A}{\partial u}+K_{13}\frac{\partial A}{\partial\sigma}\right)=0 \qquad (\text{在}V\text{内})\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&D[K_3\sigma+K_6\frac{\partial A}{\partial e}+(K_9+K_{12})\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\left(K_7e+K_8\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right.\\&\left.\left.+K_9Du+K_{15}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right]+f=0 \qquad (\text{在}V\text{内})\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&K_{16}\overline{P}+D_u[K_3\sigma+K_6\frac{\partial A}{\partial e}+(K_9+K_u)\frac{\partial A}{\partial u}+\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\left(K_7e\right.\\&\left.\left.+K_8\frac{\partial B}{\partial\sigma}+K_9Du+K_{15}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right]=0 \qquad (\text{在}S_p\text{上})\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$u-\bar{u}=0 \qquad (在S_u上) \qquad (2.10)$$

$$D_n\left\{(K_3+K_{17})\sigma+(K_6+K_{18})\frac{\partial A}{\partial e}+(K_9+K_{12}+K_{19})\frac{\partial A}{\partial u}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\left[K_7 e+K_8\frac{\partial B}{\partial \sigma}+K_9 Du+K_{15}\frac{\partial B}{\partial u}\right]\right\}=0 \qquad (在S_u上) \qquad (2.11)$$

对于任意给定的一组不全为零的参数K_i（$i=1, 2, \cdots, 19$），如果我们能由式(2.6)～(2.11）推出式（1.1）～（1.5），则称这组K_i为可取点。由所有可取点形成的集合叫可取点集，记为R。因此点集R中的每个元素均对应一个变分原理，这样我们就得到一个变分原理集合V_R。由于点集R是无穷集合，故V_R亦为无穷集合。式（2.5）是属于V_R的变分原理的一般表达式。

仔细研究式（2.6）～（2.11），发现当K_i服从表1的选取规律，且

$$K_{15}=-K_8;\quad K_{16}=-1;\quad K_{17}=-1-K_{18}-K_{19} \qquad (2.12)$$

则式（2.5）给出具有三类独立变分宗量的变分原理。表1中泛函Π_{Ri}（$i=1, 2, 3, 4$）的表达式见附录Ⅰ。泛函中出现的各参数K_i为不破坏表1中限制性条件的任意常数。若解除表1中某个变分原理的某一个限制性条件（即令该参数为零），则须引入相应的约束条件作为该变分原理的约束条件，从而保证变分结果等价于式（1.1）～（1.5）。这时，变分原理的独立变分宗量由三类降为二类或一类（解除全部限制性条件）。

若Π_{R1}中的参数$K_2=K_9=K_{18}=K_{19}=0$，$K_3=1$，则退化为文献[7]的变分原理。若进一步令$K_1=-1$，则得胡海昌-鹫津久一郎变分原理。

表1 泛函Π中部分K_i的取值规律

泛函	保留的K_i	$K_i=0$	部分K_i之间的关系	限制性条件	约束条件
$\Pi_{R1}(\sigma, e, u)$	$i=1,2,3,9$	$i=4,5,6,7,8,14$	$K_{10}=-K_1$; $K_{11}=-K_1-K_2-K_3$; $K_{12}=1-K_9-K_3$; $K_{13}=K_2$	$K_1=0$	$\sigma-\frac{\partial A}{\partial e}=0$
				$K_3=0$	$e-DU=0$
$\Pi_{R2}(\sigma, e, u)$	$i=1,4,6,9$	$i=2,3,5,7,8,13$	$K_{10}=-K_1-K_4$; $K_{11}=-K_1$; $K_{12}=1-K_6-K_9$; $K_{14}=-K_4-K_6$	$K_1=0$	$\sigma-\frac{\partial A}{\partial e}=0$
				$K_6=0$	$e-Du=0$
$\Pi_{R3}(\sigma, e, u)$	$i=2,3,4,9$	$i=1,6,7,8,14$	$K_5=-K_4$; $K_{10}=-K_4$; $K_{11}=-K_2-K_3$; $K_{12}=1-K_3-K_9$; $K_{13}=-K_4-K_2$	$K_4=0$	$e-\frac{\partial B}{\partial \sigma}=0$
				$K_3=0$	$e-Du=0$
$\Pi_{R4}(\sigma, e, u)$	$i=2,4,6,9$	$i=1,3,8,7,13$	$K_5=-K_2$; $K_{10}=-K_4$; $K_{11}=-K_2$; $K_{12}=1-K_6-K_9$; $K_{14}=K_2-K_4-K_6$	$K_2=0$	$\sigma-\frac{\partial A}{\partial e}=0$
				$K_6=0$	$e-Du=0$

2．线性弹性本构关系

对于线弹性体，式（2.5）简为化为

$$\Pi_L(\sigma,e,u)=\iiint_V[K_1\sigma\cdot e+K_2\sigma\cdot b\cdot\sigma+K_3\sigma\cdot Du+K_4 e\cdot a\cdot e$$

$$+K_5 a\cdot e\cdot Du+K_6 Du\cdot a\cdot Du-fu]dV+\iint_{S_\sigma}K_7\overline{p}\,uds$$

$$+\iint_{S_u}(u-\overline{u})D_s(K_8\sigma+K_9 a\cdot e+K_{10}a\cdot Du)dS \tag{2.13}$$

式中K_i（$i=1$，2，…，10）为不全为零的可调参数。

若设σ、e、u为独立变分宗量，则令上式变分为零；得

$$K_1\sigma+2K_4 a\cdot e+K_5 a\cdot Du=0 \quad（在 V 内） \tag{2.14}$$

$$K_1 e+2K_2 b\cdot\sigma+K_3 Du=0 \quad（在 V 内） \tag{2.15}$$

$$D(K_3\sigma+K_5 a\cdot e+2K_6 a\cdot DU)+f=0 \quad（在 V 内） \tag{2.16}$$

$$K_7\overline{P}+D_s(K_3\sigma+K_5 a\cdot e+2K_6 a\cdot Du)=0 \quad（在S_\sigma上） \tag{2.17}$$

$$D_s[(K_3+K_8)\sigma+(K_5+K_9)a\cdot e+(2K_6+K_{10})a\cdot Du]=0 \quad（在S_u上） \tag{2.18}$$

$$u-\overline{u}=0 \quad（在S_u上） \tag{2.19}$$

记R_L为相应的可取点集；V_{RL}为变分原理集合，则式（2.13）是V_{RL}中泛函的一般表达式。

做相同分析，我们有：若K_i服从表 2 的选取规律及

$$K_6=\tfrac{1}{2}(1-K_3-K_5)\;;\;K_7=-1;\;K_8=-1-K_8-K_9 \tag{2.20}$$

则式（2.13）给出具有三类独立变分宗量的变分原理。表 2 中的泛函表达式见附录Ⅱ。关于限制性条件，结论同上，故不累述。

若令Π_{L5}中的$K_9=K_{10}=0$，$K_3=1$，则Π_{L5}简化为钱伟长用高阶拉氏乘子法推出的变分原理。若进一步令$K_1=-1$，则得胡海昌-鹫津久一郎变分原理。若$K_1\neq0$，Π_{L3}的变分给出余能形式的物理方程，故按文献[8]的分类，我们可以认为Π_{L3}即为第11类变分原理的泛函表达式，所不同的是几何方程中包含了物理方程的影响项。进一步若应力场满足平衡方程，则Π_{L1}和Π_{L3}简化为第 6 类变分原理的泛函表达式。

表 2　泛函Π_L中部分K_i的取值规律

泛　函	保留的K_i	$K_i=0$	部分K_i之间的关系	限制性条件	约束条件
$\Pi_{L1}(\sigma,e,u)$	$i=3,4$	$i=1$	$K_2=-\frac{K_3}{2}$; $K_5=-2K_4$	$K_3=0$	$e-\sigma b=0$
				$K_4=0$	$e-Du=0$
$\Pi_{L2}(\sigma,e,u)$	$i=1,5$	$i=2$	$K_3=-K_1$; $K_4=\frac{-1}{2}(K_1+K_5)$	$K_1=0$	$\sigma-ae=0$
				$K_1+K_5=0$	$e-Du=0$

$\Pi_{L3}(\sigma, e, u)$	$i=1, 5$	$i=3$	$K_2=-\frac{K_1}{2}$; $K_4=-\frac{1}{2}(K_1+K_5)$	$K_1=0$	$e-b\sigma=0$
				$K_1+K_5=0$	$e-Du=0$
$\Pi_{L4}(\sigma, e, u)$	$i=1, 3$	$i=4$	$K_5=-K_1$; $K_2=-\frac{1}{2}(K_1+K_3)$	$K_1=0$	$\sigma-ae=0$
				$K_1+K_3=0$	$e-Du=0$
$\Pi_{L5}(\sigma, e, u)$	$i=1, 3$	$i=5$	$K_4=-\frac{K_1}{2}$; $K_2=-\frac{1}{2}(K_1+K_3)$	$K_1=0$	$\sigma-ae=0$
				$K_1+K_3=0$	$e-Du=0$

三、Π_{L1} 在有限元中应用例子

以Timoshenko梁和Mindlin板理论为基础构造梁板单元是避免经典梁、板单元中C'问题的有效途径。然而，用剪切梁或板单元分析细梁或薄板时，往往会出现剪切自锁现象[9]。下面，我们指出用Π_{L1}可以自然地避免剪切自锁现象。

在Π_{L1}中令$K_3=K_9=K_{10}=0$，并且（1）选择常用的C^0类插值函数作为位移场；(2)剪切应变取为零，弯曲应变由位移场计算，则应变能便达式可写成：

$$U_{\lambda'}=U_b+\lambda' U_s \tag{3.1}$$

式中U_b，U_s为弯曲、剪切应变能，而λ'则为任意常数。Fried[13~14]曾建议取$\lambda'=C\cdot\left(\frac{h}{l}\right)^2$（$C$为任意常数，$h$和$l$为板单元厚度及边长）来平衡弯曲应变能与剪切应变能。Hughes[10]引用适用有限元分析的剪切校正因子的概念，给出λ'的物理直观解释。本文则从变分原理的严格推导说明λ'是任意常数的合理性。下面，分别讨论梁、板的情形。

（1）Timoshenko梁

对于文献[9、10]中的两节点Timoshenko梁单元，若取

$$\lambda'=\frac{12Er^2}{l^2K^2_*G} \tag{3.2}$$

则Timoshenko梁单元退化为Bernouli-Euler梁单元，从而避免了剪切自锁现象。式(3.2)中，r为截面回转半径；l为单元长度；K_*为剪切修正因子；E、G为弹性常数。

（2）Mindlin 板单元

针对文献[9]中的单元S_1，若取

$$\lambda'=\overline{\lambda}\frac{\pi^2t^2l_e^2}{6(1-\mu)K^2_*A_e^2} \tag{3.3}$$

可以避免剪切自锁现象。式中$\overline{\lambda}$为任意常数；μ为泊松比；t为板厚；A_e单元面积；l_e^2为单元两对角线长度平方和的一半。表3和表4给出了计算结果。结果表明$\overline{\lambda}=1.0$消除惩罚项，从根本上避免剪切自锁现象的发生。

表 3　中心作用集中力四边固支方板的中点无量纲挠度　$\beta=\frac{W_c\cdot D}{qL^2}\times10^4$

单元 / 网格 β	ACM	误差	文献[11]	误差	文献[9]S_1	误差	本文$\bar{\lambda}=1.0$	误差
2×2	61.344	+9.31	56.460	+0.605	48.641	−13.33	53.765	−4.20
4×4	58.025	+3.39	56.417	+0.529	54.302	−3.24	55.852	−0.478
8×8	56.721	+1.07	56.242	0.217	55.868	−0.449	56.109	−0.020
精确解	56.120							

表 4　均布力作用下四边简支方板中点无量纲挠度　$\beta=\frac{W_c\cdot D}{qL^4}\times10^4$

单元 / 网格 β	ACM	误差	文献[11]	误差	文献[9]S_1	误差	本文$\bar{\lambda}=1.0$	误差
2×2	43.282	6.54	41.501	2.16	39.713	−2.24	40.349	−0.68
4×4	41.293	1.65	40.854	0.57	40.433	−0.47	40.563	−0.15
8×8	40.791	0.41	40.682	0.14	40.517	−0.26	40.601	−0.06
精确解	40.6235							

参 考 文 献

[1] E. Reissner, On the variational theorem in elasticity, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 29, №2, 1950, PP. 90.

[2] 胡海昌，论弹性体力学与受范力学中的一般变分原理，物理学报，1954年，第10卷第 3 期。

[3] Washizu, K., On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, M.I.T., Tech. Report 25−8, March., 1955.

[4] 钱伟长，弹性力学中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，1979年，第 1 、 2 期。

[5] 钱伟长，变分法及有限元，科学出版社，1980年。

[6] 胡海昌，关于拉格朗日乘子法及其它，力学学报，1985年，第 5 期，P426。

[7] 罗恩，弹性力学中的基本广义变分原理与组合广义变分原理，中山大学学报，1985年，第 4 期，P28。

[8] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和具有更一般的泛函的弹性力学广义变分原理，应用数学和力学，1983年，第 4 卷第2期。

[9] 胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社，1981年。

[10] T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and W. Kanoknulchai, A simple and efficient element for plate bending, Int. J. Numer. Meths. Engng., 11 (1977), PP. 1529.

[11] A. Tessler and T. J. R. Hughes, An improved treatment of transverse shear in the Mindlin-type four-node quadrilateral element, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., 39 (1983) . PP. 311.

[12] Erian A. Armanios and H. M. Hegin, An Improved rectangular element for plate bending analysis, Comput. & Shuct., 16 (1983), PP. 677.

[13] I. Fried, Shear in C^0 and C^1 plate bending elements, Int. J. Solids Structures, 9 (1973) . PP. 449.

[14] I. Fried and S. K. Yang, Triangular nine-degree-of-freedom C^0 plate bending element of quadratic

accuracy, Quart. Appl. Math., 31 (1973), PP.303.
[15] I. Fried, Residual energy balancing technique in the generation of plate bending finite element, Comput. & Sfruct., 4 (1974) PP.771.

附 录I

$$\Pi_{R1}(\sigma,e,u)=\iiint_V\{A(Du)+K_1[\sigma\cdot e-A(e)-B(\sigma)]+K_2[\sigma\cdot\frac{\partial B}{\partial\sigma}-A\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right)-B(\sigma)]$$

$$+K_3[\sigma\cdot Du-A(Du)-B(\sigma)]+K_9\left[\frac{\partial A}{\partial u}\cdot DU-A(Du)-B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right]\}dV+W$$

$$\Pi_{R2}(\sigma,e,u)=\iiint_V\{A(Du)+K_1[\sigma\cdot e-A(e)-B(\sigma)]+K_4\left[\frac{\partial A}{\partial e}\cdot e-A(e)-B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\right]$$

$$+K_6\left[\frac{\partial A}{\partial e}\cdot Du-A(Du)-B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\right]+K_9\left[\frac{\partial A}{\partial u}\cdot Du-A(Du)-B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right]\}dV+W$$

$$\Pi_{R3}(\sigma,e,u)=\iiint_V\{A(Du)+K_2[\sigma\cdot\frac{\partial B}{\partial\sigma}-A\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right)-B(\sigma)]+K_3[\sigma\cdot Du-A(Du)-B(\sigma)]$$

$$+K_4\left[\frac{\partial A}{\partial e}\left(e-\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right)+A\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma}\right)-A(e)\right]+K_9\left[\frac{\partial A}{\partial u}\cdot Du-A(D)u-B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right]\}dV+W$$

$$\Pi_{R4}(\sigma,e,u)=\iiint_V\{A(Du)+K_2\left[\left(\sigma-\frac{\partial A}{\partial e}\right)\frac{\partial B}{\partial\sigma}-B(\sigma)+B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\right]+K_4\left[\frac{\partial A}{\partial e}\cdot e-A(e)\right.$$

$$\left.-B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\right]+K_6\left[\frac{\partial A}{\partial e}\cdot Du-A(Du)-B\left(\frac{\partial A}{\partial e}\right)\right]+K_9\left[\frac{\partial A}{\partial u}\cdot Du-A(Du)-B\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right]\}$$

$$dV+W$$

式中：$W=-\iiint_V fu\,dV-\iint_{S_p}\bar{p}\,u\,dS-\iint_{S_u}(u-\bar{u})D_n\left[\sigma+K_{18}\left(\sigma-\frac{\partial A}{\partial e}\right)+K_{19}\left(\sigma-\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right]dS$

附录II

$$\Pi_{L1}(\sigma,e,u)=\iiint_V[\tfrac{1}{2}D\cdot au\cdot Du-\frac{K_3}{2}(\sigma-a\cdot Du)(b\sigma-Du)+K_4(e-Du)\cdot a\cdot(e-Du)]$$

$$dV+W$$

$$\Pi_{L2}(\sigma,e,u)=\iiint_V\{\tfrac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du+K_1[\sigma(e-Du)+\tfrac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du-\tfrac{1}{2}e\cdot a\cdot e]-\frac{K_5}{2}$$

$$(e-Du)\cdot a\cdot(e-Du)\}dV+W$$

$$\Pi_{L3}(\sigma,e,u)=\iiint_V\left[\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du+\frac{K_1}{2}(\sigma-a\cdot e)(e-b\cdot\sigma)-\frac{K_5}{2}(e-Du)\cdot a\cdot(e-Du)\right]dV+W$$

$$\Pi_{L4}(\sigma,e,u)=\iiint_V\left[\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du+K_1(\sigma\cdot e-a\cdot e\cdot Du-\frac{1}{2}\sigma b\sigma+\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du)+K_3(\sigma\cdot Du-\frac{1}{2}\sigma\cdot b\cdot\sigma-\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du)\right]dV+W$$

$$\Pi_{L5}(\sigma,e,u)=\iiint_V\left[\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du+K_1(\sigma\cdot e-\frac{1}{2}e\cdot a\cdot e-\frac{1}{2}\sigma\cdot b\cdot\sigma)+K_3(\sigma\cdot Du-\frac{1}{2}Du\cdot a\cdot Du-\frac{1}{2}\sigma\cdot b\cdot\sigma)\right]dV+W$$

式中 $W=-\iiint_V fudV-\iint_{S_p}\bar{p}udS-\iint_{S_u}(u-\bar{u})D_n[\sigma+K_9(\sigma-ae)+K_{10}(\sigma-aDu)]dS$

ON MULTIPARAMETERS VARIATIONAL PRINCIPLES AND THEIR APPLICATION IN BEAM PLATE ELEMENTS

Tong Li-Yong

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

This paper, basing on the fundamental concept of strain energy, studies the multiparameters variational principles set V_R which is applicable for both linear and nonlinear elastic mechanics problems. The applications of Π_{L1} in finite element analyses of Timoshenko beam and Mindlin plate are discussed in detail. The numerical results show that proper chose of the parameter in functional Π_{L1} can not only improve the convergent properties of the element concerned, but also avoid the troublesome caused by the so-called "shear locking".