

文章编号: 1000-4750(2007)04-0052-07

# 外源波动问题数值模拟的一种实现方式

\*赵建锋, 杜修力, 韩 强, 李立云

(北京工业大学 城市与工程安全减灾省部共建教育部重点实验室, 北京 100022)

**摘 要:** 将人工边界上的波动场分解为无局部场地效应影响的自由场与局部场地效应引起的散射场两部分, 无限域地基中的波动传播对人工边界的影响通过将位移场、速度场转化为应力场施加到人工边界节点上来反映, 其中散射波场的模拟采用了杜修力等提出的一种远场近似解。在此基础上, 利用通用有限元软件实现了斜入射条件下瞬态平面地震波作用引起的局部场地效应的时域数值模拟, 为计算二维、三维局部不规则、非均匀场地的地震局部场地效应以及土结动力相互作用等外源波动问题提供了一种有效、实用的实现方式。建议方法的优点是可直接借助通用有限元软件强大的求解器和前后处理功能来计算和分析近场波动反应, 且实现简便。实际上, 由于通用有限元软件强大的求解功能, 可方便地用于局部场地存在不均匀、非线性的情况。

**关键词:** 外源波动; 有限元法; 数值模拟; 粘弹性人工边界; 自由场边界

**中图分类号:** P315.3<sup>+1</sup>; TU311.3 **文献标识码:** A

## AN APPROACH TO NUMERICAL SIMULATION FOR EXTERNAL SOURCE WAVE MOTION

\*ZHAO Jian-feng, DU Xiu-li, HAN Qiang, LI Li-yun

(The Key Lab. of Urban Security and Disaster Engineering Beijing University of Technology, Ministry of Education, Beijing 100022, China)

**Abstract:** The wave field of artificial boundary is separated into free field without local topography effect and scattering field induced by local topography effect. In infinite ground, the influence of wave propagation on artificial boundary is realized by transforming displacement field as well as velocity field to stress field which are imposed on the boundary nodes, and scattering wave field is modeled as a far field approximately solution introduced by Du Xiuli. On this basis, the time domain numerical simulation of local topography effect under obliquely incident transient plane wave can be performed in virtue of general FEM software. Thusly, an efficient method to calculate external source wave motion such as local topography effect in two or three dimension irregular, uneven field and soil structure dynamic interaction is developed. The advantage of the proposed method will simplify the analysis of nearfield wave with strong solver and pre-post process of general finite element software. In fact, due to the strong calculation function of general FEM software, the method can easily applied to the analysis of uneven and nonlinear problems.

**Key words:** external source wave motion; finite element method; numerical simulation; viscous-spring artificial boundary; free field boundary

收稿日期: 2006-02-13; 修改日期: 2006-07-03

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(50325826), 北京市教育委员会科学技术与研究生建设项目(4700001401509)资助

作者简介: \*赵建锋(1976), 男, 河南人, 博士生, 主要从事结构抗震等方面的研究(E-mail: zhaojf@bjut.edu.cn);

杜修力(1962), 男, 四川人, 教授, 博士, 博导, 主要从事工程地震、结构抗震、抗爆等方面的研究(E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn);

韩 强(1974), 男, 河南人, 博士生, 主要从事工程抗震方面的研究(E-mail: hanq@emails.bjut.edu.cn);

李立云(1973), 男, 河北人, 博士生, 主要从事土壤液化和土-结构相互作用方面的研究(llyun@emails.bjut.edu.cn).

地震发生时,局部不规则地形特征会对地面运动产生很大影响,进而影响结构的动力响应。因此局部不规则地形对地震波传播的影响,一直是地震工程的重要研究课题之一。该问题的求解可采用解析法和数值法。解析法在问题本质分析方面有着重要的作用,但是由于波动问题的复杂性,解析法仅可适用于一些简单的工况,且多针对于平面SH波,如半圆形河谷场地的散射<sup>[1]</sup>、椭圆孔对SH波的散射<sup>[2]</sup>及圆弧形凹陷地形<sup>[3]</sup>等特殊情况,而对于不规则的地形条件,或者对于平面P波和SV波入射情况由于它们在散射时的波型转换比SH波要复杂得多,很难获得解析解。相对而言,数值法具有很强的适应性和高度的灵活性,可用于分析和处理复杂的工程和理论研究问题。数值方法包括有限单元法、有限差分法等,但计算精度和稳定性以及计算效率一直是其发展的瓶颈。近年来,随着高速度、大容量计算机的发展,有限元法得到很大发展,在众多研究领域发挥重要作用<sup>[4]</sup>。文献[5]采用FLAC软件对均质粘弹性陡坡地形土层在竖直输入SV波情况下的反应进行了数值模拟,研究了陡坡形状、卓越频率、持时以及土介质的动力性质对地面运动的影响,认为不规则陡坡地形对其临近的地面运动特征存在显著的影响,但只分析了竖直入射的情况,而且人工边界精度不够。文献[6]用有限元法结合修正的透射人工边界,研究了P波、SV波、Rayleigh波传播时孤凸和相邻地形对地面运动的影响,得出了一些有益的结论,但其有限元程序和人工边界的实现比较复杂,不便利用通用商业有限元软件,且P波、SV波的输入仍是垂直方式。文献[7]采用粘弹性边界,把波动输入问题转换为波源问题来考虑,在Super SAP中计算了SH波斜入射时半圆形河谷的响应。本文在综合分析各种局部人工边界的基础上,采用一种新的粘弹性人工边界和波场分解技术,将无限域地基中的波动传播效应转化为对人工边界的应力场作用,并借助通用商业有限元软件(ANSYS),实现了斜入射瞬态平面波(P波或SV波)条件下局部地形引起的波散射问题的数值模拟。本文方法还可方便用于局部场地存在不均匀、非线性等情况,是计算二维、三维局部不规则、非均匀场地的地震局部场地效应以及土-结动力相互作用等外源波动问题的一种有效、实用的方法。

## 1 近场波动模拟中的人工边界

### 1.1 局部人工边界的研究现状

作为地基的土层是半无限体,而我们最感兴趣的往往集中于近场。在应用有限元法分析地震波动

散射问题时,必须从半无限介质中切取出有限的计算区域,并在计算区域边界上引入合适的人工边界条件,以达到消除反射、模拟波动透射过程的目的。在设置人工边界后,要实现对原连续介质的精确模拟,必须保证波在人工边界处的传播特性与在原连续介质中的一致,使得波通过人工边界时无反射效应,发生完全透射。因此,人工边界的精度直接影响着对原连续介质模拟的精度。

廖振鹏<sup>[8]</sup>通过引入一个假定的外行人工波速的概念建立的多次透射边界,为近场波动模拟提供了有效的工具,但是该边界存在高频振荡和漂移失稳问题,而且通常边界计算点与有限元网格离散节点不一致,需要通过内插方法来获得边界计算点的响应,不便直接在大型通用的商业程序上实现。1969年Lysmer,J和Kuhlemeyer,R.L<sup>[9]</sup>提出的粘性边界由于物理意义清晰,处理方法简单,对瞬态波吸收效果好,且便于直接在大型通用的商业程序上实现,因此广为使用。目前通用有限元软件如FLAC、LS-DYNA、Abaqus、Adina、Ansys等都提供了该种粘性边界条件。然而,粘性边界对于非垂直入射的平面波存在一定的反射,而且粘性边界还存在零频漂移问题。粘弹性人工边界<sup>[7,10,11]</sup>是采用与粘性边界相类似的推导过程建立的一种局部人工边界条件,它通过沿人工边界设置一系列由线性弹簧和阻尼器组成的简单力学模型来吸收射向人工边界的波动能量,从而达到消除反射的效果。L.Kellezi<sup>[12]</sup>在粘弹性边界的基础上考虑了人工边界上波动的入射角度,针对每一个入射角度给出了不同的边界参数,对于点源问题采用该边界具有很好的精度和可操作性。但是很多问题(比如不规则场地的散射问题和多波源问题)都难以用点源问题来替代,从而难以应用。

粘性边界是基于平面波假定建立的,也即波源在无穷远处,粘弹性边界则是基于球面波理论建立的,如果波源位置相对于边界足够远,则粘弹性边界和粘性边界一致。事实上,这两种边界都需要确定波源位置的条件下才能确定边界的参数,而真正的地震波经过地层界面的多次反射折射以及不规则地形的散射情况,无法确定波源的位置。杜修力、赵密<sup>[13]</sup>给出了根据平面波和远场散射波混合经验叠加并考虑多角度透射的改进粘弹性边界公式。它的经验参数能反映人工边界外行波动的衰减和多角度透射特性,由于这一边界条件的远场散射波是

基于点源的格林函数解推得,它避免了基于球面波理论的粘弹性边界解与泊松比无关的理论缺点。从数值模拟的结果来看,无论是波源问题还是散射问题都具有较高的计算精度。

## 1.2 粘弹性边界<sup>[13]</sup>及其在 ANSYS 中的实现

粘弹性边界相当于在人工边界上设置一系列由线性弹簧与粘滞阻尼器并联的弹簧-阻尼物理元件,对应于二维、三维人工边界的弹簧刚度系数和粘滞阻尼系数分别如下:

二维人工边界的弹簧-阻尼元件参数为:

法向边界:

$$K = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{\lambda+2G}{2r} \cdot A \quad C = \beta\rho c_p \cdot A \quad (1)$$

切向边界:

$$K = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{G}{2r} \cdot A \quad C = \beta\rho c_s \cdot A \quad (2)$$

三维人工边界的弹簧-阻尼元件参数为:

法向边界:

$$K = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{\lambda+2G}{r} \cdot A \quad C = \beta\rho c_p \cdot A \quad (3)$$

切向边界:

$$K = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{G}{r} \cdot A \quad C = \beta\rho c_s \cdot A \quad (4)$$

其中,  $\rho$  为介质密度;  $A$  为边界节点所代表的面积;  $c_p = \sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$  和  $c_s = \sqrt{G/\rho}$  分别为 P 波和 S 波波速; 长度  $r$  可简单地取为近场结构几何中心到该人工边界点所在边界线或面的距离; 参数  $\alpha$  表示平面波与散射波的幅值含量比, 反映人工边界外行透射波的传播特性; 参数  $\beta$  表示物理波速与视波速的关系, 反映不同角度透射多子波的平均波速特性。

调节参数  $\alpha$ 、 $\beta$  将使人工边界外行透射波近似满足近场波动问题的复杂波场性质, 从而提高人工边界计算精度。 $\alpha$ 、 $\beta$  的取值可通过数值试验经验地获得。 $\alpha$ 、 $\beta$  的较优建议值为  $\alpha=0.8$ 、 $\beta=1.1$ 。

采用 ANSYS 内的 combin14 单元模拟人工边界的切向和法向弹簧-阻尼元件, 通过 APDL 语言编写命令流的方式为计算区域统一施加人工边界, 不仅容易操作, 采用参数化编程可以方便地应用到不同的计算模型中去。

## 2 外源波动问题的自由场边界条件

外源波动问题指波源来自人工边界外的无穷远, 如地震波入射问题。对于人工边界外的无限域,

可以将总波场  $u^T$  分解为散射波场  $u^S$  和自由波场  $u^F$ :

$$u^T = u^S + u^F \quad (5)$$

因此, 可以采用粘弹性边界和自由场结合的方法来处理外源波动问题。按照这种方法来处理外源波动问题时, 将任意外源波场统一为自由波场。在计算区域的边界上, 由弹簧-阻尼元件组成的粘弹性边界吸收散射波场的能量, 而自由波场直接通过转换为应力边界条件施加在边界上, 从而提高了边界的透射精度。

由位移连续条件和力学平衡条件, 人工边界上任一点  $l$  的运动方程可写为:

$$m_l \ddot{u}_{lj}^T(t) + C_l \dot{u}_{lj}^T(t) + K_l u_{lj}^T(t) = R_{lj}^F(t) + R_{lj}^S(t) \quad (6)$$

式中,  $R_{lj}^F(t)$  和  $R_{lj}^S(t)$  分别为模拟自由场和散射场需要在人工边界节点施加荷载。

其中, 为模拟散射场而在人工边界节点上施加的力近似由粘弹性边界(弹簧-阻尼元件组合)来提供, 无需在边界节点上附加额外的荷载:

$$R_{lj}^S(t) = -K_{lj} \cdot u_{lj}^S(t) - C_{lj} \cdot \dot{u}_{lj}^S(t) - K_{lj} [u_{lj}^T(t) - u_{lj}^F(t)] - C_{lj} [\dot{u}_{lj}^T(t) - \dot{u}_{lj}^F(t)] \quad (7)$$

模拟自由场时, 在粘弹性边界节点需要施加的荷载分为人工边界上弹簧-阻尼元件所需的力和自由场在人工边界处的应力场两部分:

$$R_{lj}^F(t) = K_{lj} \cdot u_{lj}^F(t) + C_{lj} \cdot \dot{u}_{lj}^F(t) + \sigma_{lj}^F(t) \cdot A \quad (8)$$

式中  $R_{lj}^F(t)$  为在自由波场条件下边界节点  $l$  在  $j$  方向上需要施加的荷载;  $K_{lj}$ 、 $C_{lj}$  分别为边界节点  $l$  在  $j$  方向上构造粘弹性人工边界时附加的弹簧、阻尼系数;  $u_{lj}^F(t)$  为原连续介质边界节点  $l$  在  $j$  方向上的自由场;  $A$  为边界节点  $l$  所代表的边界面积; 根据广义胡克(Robert Hooke)定律, 对于各向同性弹性介质由自由场波动产生的应力场  $\sigma_{lj}^F(t)$ :

对于边界点  $l$  的切向  $j$  (假定方向  $i$  为边界节点  $l$  的外法向):

$$\sigma_{lj}^F(t) = G(u_{li,i}^F(t) + u_{li,j}^F(t)) = \rho C_s^2 (u_{li,i}^F(t) + u_{li,j}^F(t)) \quad (9)$$

对于边界点  $l$  的法向  $i$  (假定方向  $j, k$  为边界节点  $l$  的两个切向):

$$\sigma_{li}^F(t) = (\lambda + 2G)u_{li,i}^F(t) + \lambda(u_{lj,j}^F(t) + u_{lk,k}^F(t)) = \rho C_p^2 \left[ u_{li,i}^F(t) + \frac{\nu}{1-\nu} (u_{lj,j}^F(t) + u_{lk,k}^F(t)) \right] \quad (10)$$

这里  $C_s$  和  $C_p$  分别为介质剪切波波速和膨胀波波速;  $\lambda$  和  $G$  分别为介质拉梅常数和剪切模量;  $\rho$  和  $\nu$  分别为介质密度和泊松比;  $i, j, k$  分别为边界节点  $l$  所在局部坐标系的三个正方向, 其中  $i$  为外法向方向;  $u_{i,j}^F(t)$  为原连续介质边界节点  $l$  在  $i$  方向上的自由场沿  $j$  方向的偏导数。

由公式(8、9、10)可以根据自由场计算出需要在粘弹性边界节点上需要施加的荷载, 通过波动散射来模拟无限地基的辐射阻尼效应, 还可以让外源地震动传入计算域内, 能够较好地模拟不规则场地波动问题。

事实上, 无论对于成层半空间还是弹性半空间, 以及是否考虑材料阻尼均可以采用粘弹性边界结合自由场的方法来处理。只要用对应成层半空间自由场替换弹性半空间自由场, 把相应的粘弹性人工边界的参数替换为各层介质的参数就可以, 同时还可以考虑入射复合波场问题, 如可以对同时入射 P 波和 SV 波。

在数值计算中, 需要首先确定半空间自由波场, 计算在所有人工边界有限元节点上需要施加的荷载。对于均匀弹性半空间而言就比较简单, 只要确定一个节点上需要施加的荷载, 其余的节点就可以通过水平波速和竖直波速来计算相对的时间间隔, 对于反射波也作同样的处理就可以推出所有节点上需要施加的荷载。对于地层较为复杂的情况例如多层不同介质则需要先求出各个节点的自由波场。

### 3 数值算例

众所周知, 在波传播模拟问题中, 有限元单元尺寸必须足够小, 才能保证波在散射网格中的传播, 另一方面, 单元划分越细, 结点越多, 计算工作量也迅速增加。因此, 对于实际工程问题, 选择合适的网格尺寸是十分重要的, 有一些研究者做过这方面的研究, 但建议的准则不尽一致。单元尺寸的选择准则一般以单元尺寸与感兴趣的谐波分量波长之比( $d/\lambda$ )来表示。Lysmer 和 Kuhlemeyer<sup>[9]</sup>建议  $d/\lambda \leq 1/12$ ; 廖振鹏和刘晶波<sup>[14]</sup>认为为了获得波长为  $\lambda_T$  的波动可靠数值结果, 有限元的网格尺寸应该取  $d \approx (1/10 \sim 1/8)\lambda_T$ ; 而 ANSYS 动力分析资料说明指出如果对波传播效果进行分析, 网格应当细到足以能够通过感兴趣频段的波, 当单元网格尺寸满

足  $d/\lambda_{\max} \leq 1/20$  时, 用有限元模型代替连续介质模型进行波动问题分析引起的误差通常可忽略不计。按照  $d/\lambda_{\max} \leq 1/20$ , 如果介质波速为 500m/s, 如果地震动的最高频率成分为  $f_{\max} = 10$  Hz, 那么应该有  $d \leq C/(20 \cdot f_{\max})$  则沿波动传播方向上网格尺寸不应超过 2.5m。

瞬态分析求解的精度取决于积分时间步长的大小, 时间步长选取过大, 将损失高频部分, 使精度降低, 严重时导致计算结果不稳定; 太小的时间积分步长则浪费计算机的资源, 且累计误差也将影响计算精度。对于采用 NEWMARK 积分法模拟波传播问题, 时间步长应当小到当波在单元之间的传播时足以捕捉到波。时域积分时间步长的选取, 则以需要获得的最大采样频率为原则。按照谐波在节点上引起的振动每个周期至少 8~10 个时间采样点, 那么进行有限元计算时的时间采样间隔最大为:  $\Delta t = 1/(10 \cdot f_{\max})$ 。实际计算中采用的时间积分步长更小以保证计算精度。

为方便有限元模拟, 计算中采用  $T=0.25$  s 的狄拉克脉冲函数作为入射波, 幅值单位为 mm。相应的  $U(t)$  及其振幅谱函数  $|\bar{U}(\omega)|$  如图 1 所示。从图中可以看出该脉冲函数的频率范围和地震动的频率范围吻合较好。

为了验证本文提出的在通用有限元程序 ANSYS 中建立的粘弹性边界以及粘弹性边界结合自由场模拟外源波动问题的方法的有效性和计算精度, 下面对弹性半空间自由场和半圆形河谷在 SV 波斜入射时的波场进行了分析, 计算中采用的各向同性均匀介质参数见表 1:

表 1 算例介质参数  
Table 1 Parameters of model medium

$P/(\text{kg}/\text{m}^3)$	$E/\text{GPa}$	$\nu$	$c_s/(\text{m}/\text{s})$	$c_p/(\text{m}/\text{s})$
2000	1.25	0.25	500	866

计算范围取水平方向 800m, 竖直方向 400m 的一个矩形区域。半圆形河谷模型所用的参数和弹性半空间自由场所用的参数一致, 河谷半径取为  $R=50$ m。

图 2 给出了 SV 波以  $15^\circ$  倾角入射时自由表面上 A 点、自由表面下方 200m 的 B 点和自由表面下方 400m 的 C 点的水平、竖直方向上的位移时程, 并与理论解作了对比, 理论解是根据 SV 波在自由表面的反射公式求得反射的 P 波和 SV 波后和原入

射波叠加获得的。通过对比可以看出采用粘弹性边界结合自由场方法模拟无限域、通过有限元方法模拟波动所得到的结果和理论解吻合得非常好，说明这一方法具有良好的计算精度。图 3 给出了 SV 波以 15° 倾角入射时半空间的位移场快照，从中可以明显看到反射 P 波和 SV 的波阵面，如果采用动画演示能形象的看出波动在介质中传播以及在自由表面的反射。

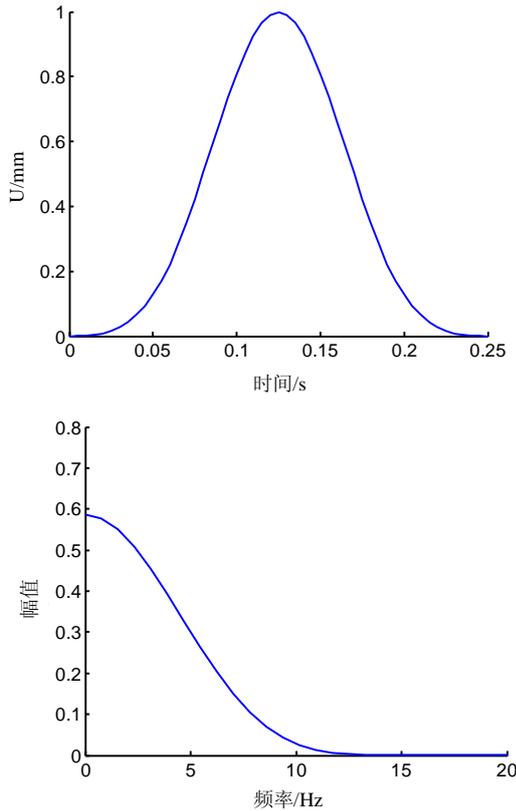
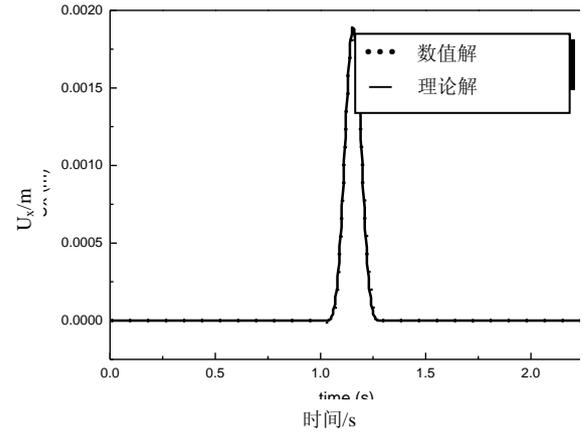


图 1 狄拉克脉冲函数时程及其振幅谱  
Fig.1 The time history and amplitude spectra of Dirac impulse

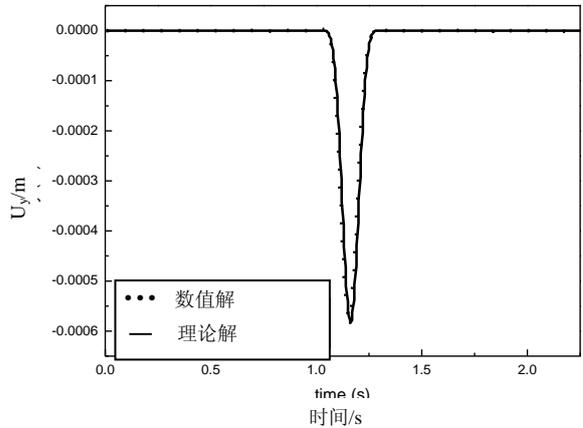
图 4 给出了 SV 波以 15° 倾角入射时半圆形河谷的左右边缘点以及谷底的时程曲线计算值和理论值，理论值采用文献[15]中给出的频域解答转换到时域，从中可以明显看出左边缘点的反应远大于自由场表面点的反应，而谷底的反应则小于自由场表面点的反应，半圆形河谷的存在对入射的 SV 波的散射效应则可以通过位移场的动画清楚的看到。由数值计算结果可知：该方法具有很好的精度，其计算误差仅为人工边界对散射场的不完全透射引起，由于该算例的输入为脉冲函数，由边界引起的误差出现在正常位移反应峰值之后。

为确定合理的计算范围，分别选取计算区域为：400m×200m 和 200m×100m，而半圆形河谷

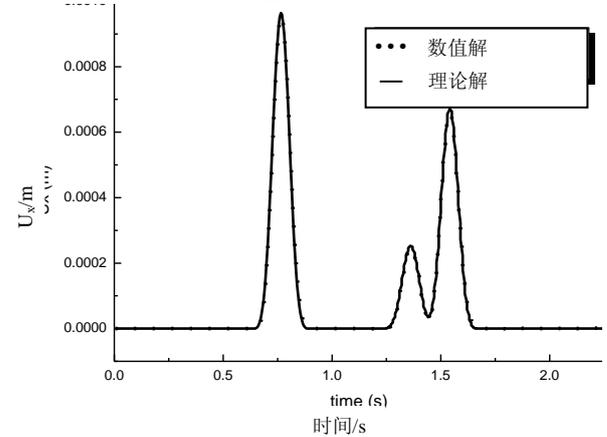
半径仍为 R=50m，其它计算条件不变。通过数值计算结果与原计算区域的结果对比可以看出，即使选取最小的计算模型，也具有较好的模拟精度，由边界引起的计算误差相对位移峰值不超过 15%，而在原模型和较小的计算模型中由边界引起的计算误差相对位移峰值分别不超过 5%和 9%。因此可以认为，一般情况下在局部场地周边扩大 3 倍以上即可获得很好地计算精度，当然计算区域选取的越大由边界反射引起的误差将越小。



A 点的水平方向位移时程



A 点的竖直方向位移时程



B 点的水平方向位移时程

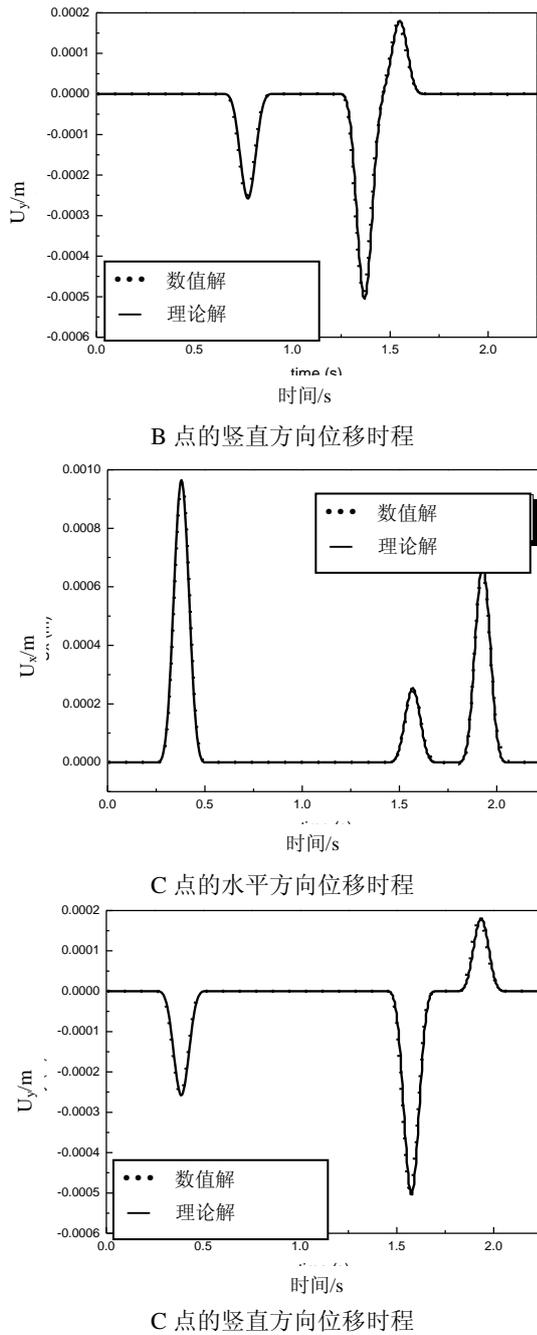


图 2 SV 波以 15° 倾角入射时 A、B、C 点的位移时程  
Fig. 2 Displacement history of point A、B、C under SV wave 15° oblique incidence

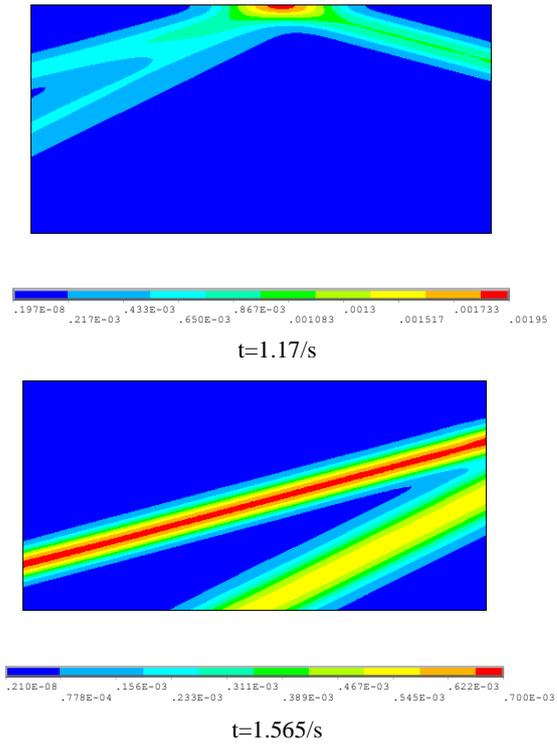
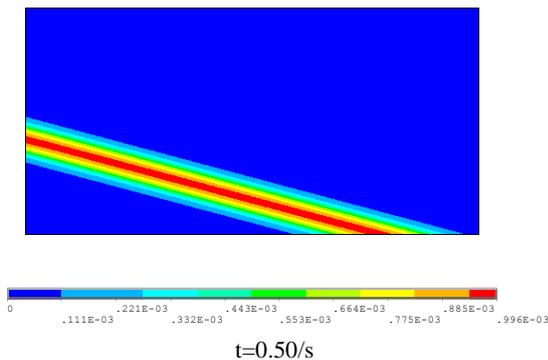


图 3 SV 波以 15° 倾角入射时半空间的位移场快照  
Fig. 3 Displacement snap of half space under SV wave 15° oblique incidence

同时对选择固定边界进行了计算，由于能量无法透过固定边界向远场辐射，在计算区域内引起反复振荡，不仅误差较大，而且有更长时间的振荡，根本不能获得合理的计算结果。

#### 4 结语

本文主要完成了以下几个方面的工作：

(1) 采用粘弹性人工边界模拟局部不规则、不均匀地形引起的无限地基中的散射波场作用和波场分解技术，并借助通用有限元软件，实现了斜入射瞬态平面波(P波或SV波)条件下的外源波动问题的数值模拟。该方法的优点是：将无限地基对近场波动传播的远场波效应转换为有限区域人工边界上的应力场作用，方便了在通用有限元软件中实现，且可以充分利用通用有限元软件的强大求解器和前后处理功能计算和分析近场波动反应；

(2) 推导了自由场波动作用在粘弹性人工边界节点上所需要施加的节点荷载公式；

(3) 将各种平面波(P波或SV波)在任意角度入射情况下的波场数值模拟方法统一起来考虑，并使得有限元进行波动问题数值模拟时能够考虑水平成层弹性半空间下的波动模拟，只需要把相应的自

由场替换为水平成层半空间的自由场(自由场可采用解析或数值方法确定)。

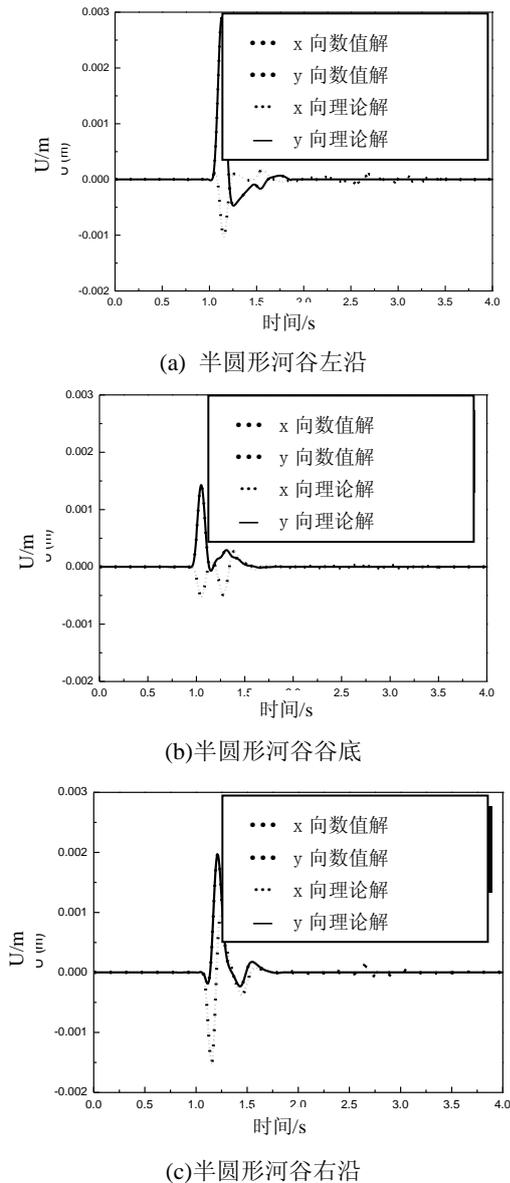


图4 SV波以 $15^\circ$ 倾角入射时半圆形河谷左右边缘点以及谷底的时程曲线

Fig. 4 Displacement history of left, right rim and bottom of canyon under SV wave  $15^\circ$  oblique incidence

本文工作为利用通用商业有限元软件计算二维、三维局部不规则、非均匀场地的地震局部场地效应以及土结动力相互作用等外源波动问题提供了一种有效、实用的途径。

#### 参考文献:

[1] Trifunac M D. Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon [J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1973, 1: 267~281.  
 [2] 陈志刚, 刘殿魁. 椭圆孔对SH波散射的远场解[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2003, 24(3): 334~338.

Chen Zhigang, Liu Diankui. Far field solution of SH wave scattering by elliptic cavity [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2003, 24(3): 334~338. (in Chinese).  
 [3] 袁晓铭, 廖振鹏. 圆弧形凹陷地形对平面SH波散射问题的级数解答[J]. *地震工程与工程振动*, 1993, 13(2): 1~11.  
 Yuan Xiaoming, Liao Zhenpeng. Series solution for scattering of plane SH waves by a canyon of circular-arc cross section [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1993, 13(2): 1~11. (in Chinese)  
 [4] 廖振鹏, 杨光. 稳态SH波动的有限元模拟[J]. *地震学报*, 1994, 16(1): 96~105.  
 Liao Zhenpeng, Yang Guang. FEM simulation of steady SH wave motion [J]. *ACTA Seismologica Sinica*, 1994, 16(1): 96~105. (in Chinese)  
 [5] Bouckovalas, Papadimitriou. Numerical evaluation of slope topography effects on seismic ground motion [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, 25(7): 547~558.  
 [6] 刘晶波. 局部不规则地形对地震地面运动的影响[J]. *地震学报*, 1996, 18(2): 239~245.  
 Liu Jingbo. The effect of local irregular topography on seismic ground motion [J]. *ACTA Seismologica Sinica*, 1996, 18(2): 239~245. (in Chinese)  
 [7] 刘晶波, 吕彦东. 结构-地基动力相互作用问题分析的一种直接方法[J]. *土木工程学报*, 1998, 31(3): 55~64.  
 Liu Jingbo, Lu Yandong. A direct method for analysis of dynamic soil-structure interaction [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1998, 31(3): 55~64. (in Chinese)  
 [8] 廖振鹏, 杨柏坡, 袁一凡. 暂态弹性波分析中人工边界的研究[J]. *地震工程与工程振动*, 1982, 2(1): 1~11.  
 Liao Zhenpeng, Yang Baipo, Yuan Yifan. Artificial boundary in analysis of transient elastic wave propagation [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1982, 2(1): 1~11. (in Chinese)  
 [9] Lysmer J, Kuhlemeyer R L. Finite dynamic model for infinite media [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1969, 95(EM4): 759~877.  
 [10] 杜修力. 局部解耦的时域波分析方法[J]. *世界地震工程*, 2000, 16(3): 22~26.  
 Du Xiuli. A partially decoupling analytical method for wave propagation problems in time domain [J]. *World Information on Earthquake Engineering*, 2000, 16(3): 22~26. (in Chinese)  
 [11] Deeks A J, Randolph M F. Axisymmetric time-domain transmitting boundaries [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1994, 120(1): 15~42.  
 [12] Kellezi L. Local transmitting boundaries for transient elastic analysis [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2000, 9(7): 533~547.  
 [13] 杜修力, 赵密, 王进廷. 近场波动模拟的一种应力人工边界[J]. *力学学报*, 2006, 38(1): 49~56.  
 Du Xiuli, Zhao Mi, Wang Jinting. A stress artificial boundary in FEA for near-field wave problem [J]. *Journal of Mechanics*, 2006, 38(1): 49~56. (in Chinese)  
 [14] 廖振鹏, 刘晶波. 离散网格中的弹性波动[J]. *地震工程与工程振动*, 1986, 6(2): 1~16.  
 Liao Zhenpeng, Liu Jingbo. Elastic wave motion in discrete grids [J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1986, 6(2): 1~16. (in Chinese)  
 [15] Vincent W Lee, Hong Cao. Diffraction of SV circular canyons of various depths [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1989, 115(9): 2035~2056.