

文章编号: 1000-4750(2012)03-0027-06

单轴对称截面圆弧拱平面外稳定性研究

杨永华¹, 吴 杰²

(1. 上海师范大学建筑工程学院, 上海 200234; 2. 同济大学土木工程学院, 上海 200092)

摘 要: 根据变分原理推导了任意开口薄壁截面曲梁的稳定平衡方程。单轴对称截面圆弧拱在均布径向荷载(均匀受压)或两端作用大小相等、方向相反的端弯矩(均匀弯曲)作用下, 平衡方程中曲率平面内的变形和曲率平面外的变形相互独立, 故要么发生曲率平面内弯曲失稳, 要么发生曲率平面外的弯扭失稳。给出单轴对称截面圆弧拱在这两种受力情况下平面外屈曲荷载的理论解答。通过一些无碍结果的近似使所得公式形式简洁, 便于在工程中应用。最后给出了计算实例, 与已有的文献进行比较, 并使用通用有限元软件 ANSYS 进行了模拟, 分析结果与该文计算结果吻合, 证明了所得公式的正确性。

关键词: 圆弧拱; 单轴对称截面; 平面外稳定; 稳定平衡方程; 弯扭屈曲荷载; 理论解

中图分类号: TU323.3 **文献标志码:** A

OUT OF PLANE STABILITY OF MONO-SYMMETRIC CIRCULAR ARCHES

YANG Yong-hua¹, WU Jie²

(1. College of Civil Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The differential equations of stability are derived by the principle of variation for arbitrary thin-walled curved beams. When mono-symmetric arch is subjected to uniformly distributed radial load (uniform compression) or to equal but opposite end moments (uniform bending), its in-plane displacements are uncoupled with out-plane displacements, so it undergoes either in-plane flexural buckling or out-plane flexural-torsional buckling. Theoretic solutions are obtained for mono-symmetric circular arches under uniform compression and under uniform bending respectively. The equations are simple enough to be applied in engineering. Numerical examples are presented to validate the equation, observing good agreement with the result calculated by finite element software ANSYS and previous theoretical.

Key words: circular arches; mono-symmetric; out of plane stability; governing differential equations; flexural-torsional buckling load; theoretic solution

曲梁由于初始曲率的存在导致梁内弯矩和扭矩的耦合, 特别是薄壁曲线梁, 除纯扭转外, 还相应伴有翘曲以及畸变的影响, 使得对曲线梁的研究相对直梁就更加复杂。已有曲梁理论所研究的大都只针对双轴对称截面^[1-6], 考虑截面不对称性影响的研究较少^[7-9]。本文推导了任意开口薄壁截面曲梁的稳定平衡方程, 给出了单轴对称截面圆弧拱

在均匀受压和均匀受弯作用下的弯扭屈曲荷载的理论解。为了验证本文推导的理论解的正确性, 文中还给出了数值实例加以验证。

1 平衡微分方程的推导

为便于推导, 选用如图 1 所示的两种坐标系:

1) x - y - z 笛卡儿坐标系, 原点在截面形心 C , x 轴、 y

收稿日期: 2010-06-08; 修改日期: 2010-07-29

基金项目: 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金项目(RE652); 上海师范大学重点学科《结构工程》资助项目(A-7001-12-002007)

通讯作者: 杨永华(1976—), 女, 河南辉县人, 副教授, 博士, 主要从事钢结构稳定理论研究(E-mail: yonghua1976@163.com).

作者简介: 吴 杰(1975—), 男, 安徽无为, 副教授, 博士, 主要从事钢结构稳定和优化研究(E-mail: wj536@163.com).

轴为截面形心主轴, 其中 x 坐标轴沿构件半径方向, z 轴沿截面形心轴切线方向, 截面剪心 S 在此坐标系中的坐标为 (x_S, y_S) ; 2) r - y - θ 为圆柱坐标系, 原点在构件轴线的曲率中心 O , r 轴与 x 轴方向相同, 并且有关系式 $r = x + R$, 其中 R 为截面形心处的曲率半径, R_S 为截面剪心 S 点处的曲率半径。

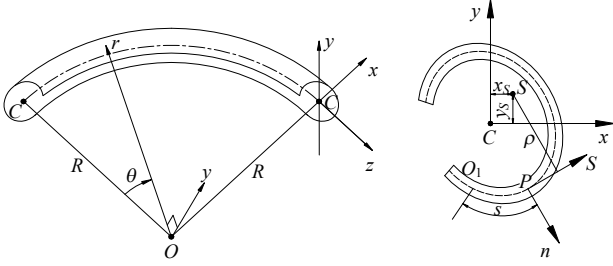


图 1 薄壁开口截面曲梁的坐标系

Fig.1 Coordinate system of a thin-walled curved beam

薄壁圆弧曲梁截面中面上任意点沿 x 、 y 、 z 坐标方向的位移为^[10]:

$$\bar{u} = u - (y - y_S) \sin \beta - (x - x_S)(1 - \cos \beta) \quad (1a)$$

$$\bar{v} = v + (x - x_S) \sin \beta - (y - y_S)(1 - \cos \beta) \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} = w - (x - x_S) & \left[\left(u' - \frac{w}{R} \right) \cos \beta + v' \sin \beta \right] - \\ & (y - y_S) \left[v' \cos \beta - \left(u' - \frac{w}{R} \right) \sin \beta \right] - \\ & \omega \left\{ \frac{1}{R} \left[\left(u' - \frac{w}{R} \right) \sin \beta - v' \cos \beta \right] + \beta' \right\} \end{aligned} \quad (1c)$$

式中: u 、 v 、 w 、 β 分别为截面形心点沿 x 、 y 、 z 坐标方向的位移和截面任意点绕形心轴的转角; $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$ 。

设 ε_z^L 、 γ_{xz}^L 、 γ_{yz}^L 为应变的线性部分, ε_z^N 为纵向应变的非线性部分, 根据应变和位移的关系可得:

$$\varepsilon_z^L = \frac{R}{r} \left[\left(w' + \frac{u}{R} \right) - \frac{R}{R_S} (x - x_S) \left(u'' - \frac{w'}{R} \right) \right] - \frac{R}{r} \left[(y - y_S) \left(\frac{R}{R_S} v'' + \frac{\beta}{R} \right) - \omega \left(\frac{R}{R_S} \beta'' - \frac{R}{R_S^2} v'' \right) \right] \quad (2a)$$

$$\gamma_{xz}^L = \left(\frac{R}{R_S} \left(\frac{\omega}{r} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - \frac{R}{r} (y - y_S) \right) \left(\beta' - \frac{v'}{R_S} \right) \quad (2b)$$

$$\gamma_{yz}^L = \left(\frac{R}{r} (x - x_S) - \frac{R}{R_S} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\beta' - \frac{v'}{R} \right) \quad (2c)$$

$$\varepsilon_z^N = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_S} \right)^2 \left(u' - \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{R}{r} \left\{ -(x - x_S) \cdot \right.$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{R_S} v'' \beta + v' \beta' + \frac{\beta^2}{2R} \right) + \frac{R}{R_S} \left(y - y_S - \frac{\omega}{R} \right) \cdot \\ & \left[\left(u'' - \frac{w'}{R} \right) \beta + \left(u' - \frac{w}{R} \right) \frac{v'}{R_S} \right] + \frac{R^2}{2r^2} \cdot \\ & \left[\left(\frac{\omega}{R} - y + y_S \right)^2 \left(\beta' - \frac{v'}{R} \right)^2 + (v' + (x - x_S) \beta')^2 \right] \end{aligned} \quad (2d)$$

薄壁构件通常应考虑应力主要有正应力 σ_z 和剪应力 τ_{zx} 、 τ_{zy} , 曲梁的总势能为:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^L \varepsilon_{ij}^L + 2\sigma_{ij}^L \varepsilon_{ij}^N) dV - \int_0^s (q_x u + q_y v + q_z w + m_z \beta) dz \quad (3)$$

式中: q_x 、 q_y 分别表示作用在 x 方向和 y 方向的横向分布荷载; q_z 为形心线上的轴向分布荷载; m_z 为分布扭矩。将式(2)代入式(3), 可得到曲梁的总势能。根据势能驻值原理, 总势能的一阶变分为零可得到平衡微分方程:

$$\begin{aligned} & -EA \left(w'' + \frac{u'}{R} \right) + \left(\frac{EI_y}{R} + \frac{x_S^2 EA}{R} - \frac{EI_{xxx}}{R^2} + \frac{2EI_y x_S}{R^2} \right) \cdot \\ & \left(u''' - \frac{w''}{R} \right) + \left(x_S EA + \frac{EI_y}{R} \right) \left(-u''' + \frac{2w''}{R} + \frac{u'}{R^2} \right) + \\ & \left(\frac{x_S y_S EA}{R} + \frac{y_S EI_y}{R^2} - \frac{EI_{xxy}}{R^2} \right) \left(v''' + \frac{\beta'}{R} \right) - y_S EA \cdot \\ & \left(v''' + \frac{\beta'}{R} \right) - \frac{1}{R_S} \frac{EI_{xx\omega}}{R_S} \left(\beta''' - \frac{v'''}{R_S} \right) - \frac{1}{R} \left(N - \frac{M_y}{R} \right) \cdot \\ & \left(u' - \frac{w}{R} \right) + \frac{1}{R_S} \left[\left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) \beta \right]' - \\ & \frac{1}{R_S^2} \left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) v' = q_z \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{R} \left(w' + \frac{u}{R} \right) + \left(\frac{EI_y}{R} + \frac{x_S^2 EA}{R} - \frac{EI_{xxx}}{R^2} + \frac{2EI_y x_S}{R^2} \right) \cdot \\ & \left(u^{IV} - \frac{w'''}{R} \right) + \left(x_S EA + \frac{EI_y}{R} \right) \left(\frac{2u''}{R} + w''' - \frac{w'}{R^2} \right) + \\ & \left(x_S y_S EA + \frac{y_S EI_y}{R} - \frac{EI_{xxy}}{R} \right) \left(v^{IV} + \frac{\beta''}{R} \right) + \\ & \frac{y_S EA}{R} \left(v'' + \frac{\beta}{R} \right) - \frac{EI_{xx\omega}}{R_S} \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) - \\ & \left[\left(N - \frac{M_y}{R} \right) \left(u' - \frac{w}{R} \right) \right]' + \left[\left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) \beta \right]'' - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R_S} \left[\left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) v' \right]' = q_x \quad (4b) \\
& \left(EI_x + y_S^2 EA - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(v^{IV} + \frac{\beta''}{R} \right) - \\
& \frac{1}{R_S} \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) + \\
& \left(x_S y_S EA + \frac{y_S EI_y}{R} - \frac{EI_{xxy}}{R} \right) \left(u^{IV} - \frac{w'''}{R} \right) + \\
& y_S EA \left(w''' + \frac{u''}{R} \right) + \frac{EI_{xx\omega}}{R_S^2} \left(u^{IV} - \frac{w'''}{R} \right) - \\
& \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(\beta^{IV} - \frac{2}{R_S} v^{IV} - \frac{\beta''}{R^2} \right) + \frac{GJ}{R_S} \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) + \\
& [(M_y + x_S N)' \beta]' - \left[\left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) \left(u' - \frac{w''}{R} \right) \right]' + \\
& \left[\left(M_y + x_S N + \frac{W^S}{R} \right) \beta' - \left(N + \frac{M_y}{R} \right) v' \right]' = q_y \quad (4c) \\
& \frac{1}{R} \left(EI_x + y_S^2 EA - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(v'' + \frac{\beta}{R} \right) + \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \cdot \\
& \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) + \frac{y_S EA}{R} \left(w' + \frac{u}{R} \right) - \\
& \frac{EI_{xx\omega}}{R_S} \left(u^{IV} - \frac{w'''}{R} \right) - GJ \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) + \\
& \frac{1}{R_S} \left(x_S y_S EA + \frac{y_S EI_y}{R} - \frac{EI_{xxy}}{R} \right) \left(u'' - \frac{w'}{R} \right) - \\
& \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(v^{IV} - \frac{1}{RR_S} v'' + \frac{2\beta''}{R} \right) - (M_y + x_S N)' v' + \\
& (M_y + x_S N) \frac{\beta}{R} + \left(M_x - y_S N - \frac{B_\omega}{R_S} \right) \left(u'' - \frac{w'}{R} \right) - \\
& (W_c \beta')' + \left[\left(M_y + x_S N + \frac{W^S}{R} \right) v' \right]' = m_z \quad (4d)
\end{aligned}$$

其中: $A = \int_A 1 dA$; $I_x = \int_A y^2 dA$; $I_y = \int_A x^2 dA$; $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$; $I_{xy\omega} = \int_A xy\omega dA$; $I_{xxx} = \int_A x^3 dA$; $I_{xxy} = \int_A x^2 y dA$; $I_{xyy} = \int_A xy^2 dA$; $I_{xx\omega} = \int_A x^2 \omega dA$ 。

2 单轴对称截面圆弧拱的平面外稳定

对于对称轴位于拱曲率平面内的单轴对称截面铰支圆弧拱, 截面的剪心在对称轴上, 即 $y_S = 0$ 。

2.1 受径向荷载作用的弯扭屈曲荷载

圆弧拱在径向均布荷载作用下(图 2), 拱内只产生轴力 $N = qR$, 为均匀受压的受力状态。此时,

$$M_x = M_y = B_\omega = 0, \quad q_y = q_z = m_z = 0 \quad (5)$$

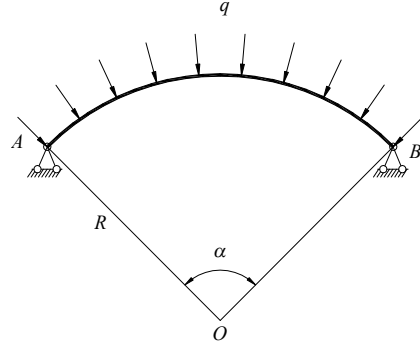


图 2 均匀受压

Fig.2 Under uniformly distributed radial load

将式(5)代入稳定平衡微分方程式(4), 曲率平面内的变形 u 、 w 和曲率平面外的变形 v 、 β 相互独立, 说明圆弧拱在径向均布荷载作用下要么发生曲率平面内弯曲失稳, 要么发生曲率平面外的弯扭失稳。和平面外稳定有关的方程为:

$$\begin{aligned}
& \left(EI_x - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(v^{IV} + \frac{\beta''}{R} \right) - \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(\beta^{IV} - \frac{2}{R_S} v^{IV} - \frac{\beta''}{R^2} \right) - \\
& \frac{1}{R_S} \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) + \\
& \frac{GJ}{R_S} \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) - \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(\beta^{IV} - \frac{2}{R_S} v^{IV} - \frac{\beta''}{R^2} \right) - \\
& N v'' + \left(x_S + \frac{r_0^2}{R} \right) N \beta'' = 0 \quad (6a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{R} \left(EI_x - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(\frac{R}{R_S} v'' + \frac{\beta}{R} \right) + \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \cdot \\
& \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) - GJ \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) - \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \cdot \\
& \left(v^{IV} - \frac{1}{RR_S} v'' + \frac{2\beta''}{R} \right) + x_S N \frac{\beta}{R} - \\
& r_{0c}^2 N \beta'' + \left(x_S + \frac{r_0^2}{R} \right) N v'' = 0 \quad (6b)
\end{aligned}$$

其中: $r_0 = \sqrt{(I_x + I_y)/A + x_S^2}$;

$$r_{0c} = \sqrt{\left(I_x + I_y + \frac{I_\omega}{R^2} + \frac{2I_{xy\omega}}{R^2} \right) / A + x_S^2}。$$

取位移函数为:

$$v = c \sin(\mu z), \quad \beta = d \sin(\mu z) \quad (7)$$

其中, $\mu = n\pi / S, n=1,2,3$, S 为拱轴线展开长度。这满足拱平面外简支的边界条件: $z=0$ 或 $z=S$ 时, $v=0$, $v''=0$, $\beta=0$, $\beta''=0$ 。将式(7)代入式(6)得到下面的特征方程:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

为了求 c 、 d 的非零解, 须使特征方程的系数行列式为零, 展开式(8)可得到关于临界荷载的二次方程:

$$AN^2 + BN + C = 0 \quad (9)$$

其中:

$$A = \left(r_{0c}^2 - \frac{r_0^4}{R^2} - x_S^2 + \frac{x_S}{R\mu^2} + \frac{x_S r_0^2}{2R} \right) \quad (10a)$$

$$B = \left(EI_\omega \mu^2 + \frac{2EI_{xy\omega}}{R^2} + GJ \right) \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) + \frac{x_S}{R^3} EI_\omega + EI_x \left(r_{0c}^2 \mu^2 - \frac{2r_0^2}{R^2} + \frac{1}{\mu^2 R^2} - \frac{x_S}{R} \right) + \left(\frac{x_S}{R^3 \mu^2} - \frac{2x_S}{R} \right) GJ \quad (10b)$$

$$C = \left[\left(EI_\omega + \frac{GJ}{\mu^2} \right) EI_x - \left(\frac{EI_{xy\omega}}{R} \right)^2 \right] \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right) \quad (10c)$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 曲梁变为直梁, 此时:

$$A = r_0^2 - x_S^2 \quad (11a)$$

$$B = EI_\omega \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 + GJ + EI_x r_0^2 \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 = r_0^2 (P_x + P_\omega) \quad (11b)$$

$$C = EI_x \left[EI_\omega \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 + GJ \right] \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 = r_0^2 P_x P_\omega \quad (11c)$$

其中, $P_x = \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 EI_x$, $P_\omega = \frac{1}{r_0^2} \left[EI_\omega \left(\frac{n\pi}{S} \right)^2 + GJ \right]$,

分别为轴心受压直构件平面外弯曲屈曲荷载和扭转屈曲荷载。代入式(9)可得:

$$P_{x\omega} = \frac{(P_x + P_\omega) - \sqrt{(P_x + P_\omega)^2 - 4P_x P_\omega [1 - (x_S/r_0)^2]}}{2[1 - (x_S/r_0)^2]} \quad (12)$$

式(12)与文献[11]中单轴对称轴心受压简支直杆的弯扭屈曲荷载相同。可见, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 单轴对称截面铰支拱的纯压弯扭屈曲荷载可回归到单轴对称截面轴心受压直杆的弯扭屈曲荷载公式。

在实际工程中, 式(10)中划线部分较其它项较小, 可略去以简化计算公式, 代入式(9)可得单轴对

称截面圆弧拱在径向均布荷载作用下的屈曲临界轴力的简化公式为:

$$N_{cr} = - \left(\frac{P_w + P_x \eta_1}{2\eta_3} \right) + \sqrt{\left(\frac{P_w + P_x \eta_1}{2\eta_3} \right)^2 + \frac{\eta_2 P_w P_x}{\eta_3}} \quad (13)$$

其中:

$$\eta_1 = 1 + \frac{1}{\mu^4 R^2 r_0^2} - \frac{x_S}{r_0^2 \mu^2 R} \quad (14a)$$

$$\eta_2 = \left(1 - \frac{1}{\mu^2 R^2} \right)^2 \quad (14b)$$

$$\eta_3 = 1 - \frac{x_S^2}{r_0^2} + \frac{x_S}{R \mu^2 r_0^2} \quad (14c)$$

2.2 受均匀弯矩作用的弯扭屈曲荷载

简支圆弧拱在两端等弯矩作用下(图3、图4), 拱内只产生均匀弯矩, 此时:

$$N = M_x = B_\omega = 0, M_y = M, q_x = q_y = m_z = 0 \quad (15)$$

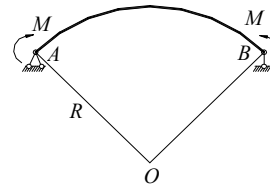


图3 正弯矩

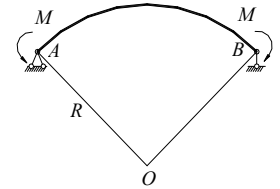


图4 负弯矩

Fig.3 Positive bending

Fig.4 Negative bending

将式(15)代入平衡微分方程式(4), 曲率平面内的变形 u 、 w 和曲率平面外的变形 v 、 β 相互独立, 说明简支拱在两端等弯矩作用下也是要么发生曲率平面内弯曲失稳, 要么发生曲率平面外的弯扭失稳。和平面外稳定有关的方程为:

$$\left(EI_x - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(v^{IV} + \frac{\beta''}{R} \right) - \frac{1}{R_S} \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \cdot \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) - \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(\beta^{IV} - \frac{2}{R_S} v^{IV} - \frac{\beta''}{R^2} \right) + \frac{GJ}{R_S} \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) - \frac{M}{R} v'' + M \left(1 + \frac{2\beta_{x0}}{R} \right) \beta'' = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{1}{R} \left(EI_x - \frac{EI_{xyy}}{R} \right) \left(v'' + \frac{\beta}{R} \right) - GJ \left(\beta'' - \frac{v''}{R_S} \right) - 2M \beta_{x0} \beta'' + \left(EI_\omega - \frac{EI_{x\omega\omega}}{R} \right) \left(\beta^{IV} - \frac{v^{IV}}{R_S} \right) + \left(1 + \frac{2\beta_{x0}}{R} \right) M v'' - \frac{EI_{xy\omega}}{R_S} \left(v^{IV} - \frac{1}{RR_S} v'' + \frac{2\beta''}{R} \right) + M \frac{\beta}{R} = 0 \quad (16b)$$

式中, $\beta_{x0} = -\int_A (x^3 + xy^2) dA / (2I_y) + x_s$, 是单轴对称截面的几何性质, 称为不对称截面常数。

取式(7)的位移函数, 代入式(16), 得到类似于式(8)的特征方程, 令特征方程的系数行列式为零, 展开可得到关于临界弯矩的二次方程:

$$AM^2 + BM + C = 0 \quad (17)$$

其中:

$$A = \left(\frac{1}{R^2 \mu^2} - 1 - \frac{2\beta_{x0}}{R} - \frac{4\beta_{x0}^2}{R^2} \right) \quad (18a)$$

$$B = \frac{1}{R} (EI_{\omega} \mu^2 + 2EI_{xy\omega} \mu^2 + GJ + EI_x) \left(\frac{1}{R^2 \mu^2} - 1 \right) - 2\beta_{x0} \left(\left(\frac{2}{R^2} - \mu^2 \right) EI_x + \frac{GJ}{R^2} + \frac{EI_{\omega}}{R^2} \mu^2 + \frac{2EI_{xy\omega}}{R^4} \right) \quad (18b)$$

$$C = \left[\left(EI_{\omega} + \frac{GJ}{\mu^2} \right) EI_x - \left(\frac{EI_{xy\omega}}{R} \right)^2 \right] \left(\mu^2 - \frac{1}{R^2} \right)^2 \quad (18c)$$

当 $n=1$ 时, 求解式(17), 即可得到最小的弯扭屈曲临界弯矩。

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 曲梁变为直梁, 此时:

$$A = -1, B = 2\beta_{x0} EI_x \mu^2, C = \left(EI_{\omega} + \frac{GJ}{\mu^2} \right) EI_x \mu^4 \quad (19)$$

代入式(17)可得:

$$M_{cr0} = EI_x \mu^2 \left[\beta_{x0} + \sqrt{\beta_{x0}^2 + \frac{I_{\omega}}{I_x} \left(1 + \frac{GJ}{EI_{\omega} \mu^2} \right)} \right] \quad (20)$$

式(20)与均匀受弯的单轴对称简支直梁的临界弯矩相同^[11]。可见, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 单轴对称截面均匀受弯拱的弯扭屈曲荷载公式可回归到单轴对称截面均匀受弯直梁弯扭屈曲荷载公式。

在实际工程中, 式(18)中划线部分相比较其它部分值较小, 可略去使屈曲荷载公式更为简化, 求解式(17)可得均匀受弯简支拱的弯扭屈曲临界弯矩的简化公式:

$$M_{cr} = EI_x \mu^2 \cdot \left[\beta'_{x0} \pm \sqrt{\beta_{x0}'^2 + \frac{\pi^2 - \alpha^2}{\pi^2} \frac{I_{\omega}}{I_x} \left(1 + \frac{GJ}{EI_{\omega} \mu^2} \right)} \right] \quad (21)$$

其中:

$$\beta'_{x0} = \beta_{x0} - \frac{S\alpha}{2\pi^2} - \frac{\alpha}{2S} \frac{I_w}{I_x} \left(1 + \frac{GJ}{EI_w \mu^2} \right) \quad (22)$$

其中, α / rad 为拱圆心角。式(21)中正负号取正号

时, 为图 3 所示的正弯矩作用下的弯扭屈曲荷载; 取负号时, 为图 4 所示的负弯矩作用下的弯扭屈曲荷载。

3 算例

3.1 受径向荷载作用

采用 Lim 论文^[9]中的算例, 构件截面为单轴对称工字形截面(图 5), 对称轴位于拱曲率平面, 拱轴线展开长度 $S=1000\text{mm}$, 上翼缘宽度 $B_1=14.4\text{mm}$, 下翼缘宽度 $B_2=2\text{mm}$, 截面高度 $H=15.8\text{mm}$, 翼缘厚度 $t_f=1.42\text{mm}$, 腹板厚度 $t_w=1.38\text{mm}$ 。弹性模量 $E=63000\text{N/mm}^2$, 剪切模量 $G=27000\text{N/mm}^2$ 。有限元结果为利用通用有限元软件 ANSYS 进行模拟的结果, 采用 SHELL63 壳单元, 沿腹板划分 7 个单元, 沿上翼缘宽度方向划分 6 个单元, 沿下翼缘宽度方向划分 2 个单元, 沿拱轴线方向划分 100 个单元。

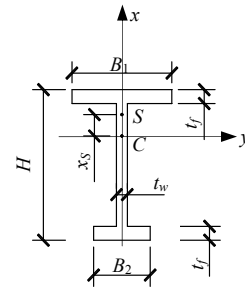


图 5 截面示意图

Fig.5 Section

表 1 给出了单轴对称截面拱受径向均布荷载作用下的屈曲荷载。从表 1 中可看出本文和 Lim^[9]、Trahair^[8]的理论分析结果以及有限元的数值模拟结果都比较接近, 说明本文对单轴对称拱的理论推导和所作的简化是合理的。单轴对称截面铰支拱在径向均布荷载作用下, 屈曲荷载随着拱圆心角的增大而逐渐减小, 当圆心角为 180° 时, 屈曲荷载为零, 这时拱可绕其两端点连线作刚体自由转动, 对平面外屈曲没有抵抗能力。

表 1 单轴对称截面拱受均布径向荷载作用下的

弯扭屈曲荷载 N_{cr} /kN

Table 1 Flexural-torsional buckling load N_{cr} of Mono-Symmetric arch under uniformly distributed radial load

研究者	圆心角 α						
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Lim 等 ^[9]	221.0	121.3	42.37	15.25	4.94	0.98	0.00
Trahair 等 ^[8]	221.1	121.7	42.49	15.28	4.94	0.98	0.00
式(9)	221.0	121.3	42.37	15.25	4.94	0.98	0.00
简化式(13)	221.0	120.9	42.26	15.22	4.93	0.98	0.00
有限元结果	221.2	123.3	43.41	15.59	5.05	1.02	0.03

3.2 受两端等弯矩作用

采用和 3.1 节算例相同的截面尺寸和材料属性,拱轴线展开长度为 $S=500\text{mm}$ 。有限元分析采用 ANSYS 软件中 SHELL63 壳单元,沿腹板划分 7 个单元,沿上翼缘宽度方向划分 6 个单元,沿下翼缘宽度方向划分 2 个单元,沿拱轴线方向划分 50 个单元。

表 2、表 3 分别给出了单轴对称截面简支拱在正弯矩作用下和负弯矩作用下的屈曲荷载的相对值 M_{cr}/M_{cr0} ,即单轴对称截面拱的屈曲荷载和相应直梁的弯扭屈曲荷载(式 20)的比值。从表 2 中可看出,在正弯矩作用下(图 3),本文式(17)和简化式(21)的计算结果和 Lim^[9]的理论分析结果以及有限元的数值模拟结果都比较接近,而 Trahair^[8]的理论值较低。本文简化公式(21)的形式简洁了很多,可见在对公式的准确性影响不大的情况下所作的简化是合理的。单轴对称截面铰支拱在正弯矩作用下,屈曲荷载随着拱圆心角的增大而逐渐减小,当圆心角为 180° 时,屈曲荷载为零。在负弯矩作用下,在荷载达到表 3 中的值之前,构件已发生局部屈曲,因此未给出有限元分析结果。从表 3 中可看出,在负弯矩作用下(图 4),本文结果和 Lim^[9]、Trahair^[8]的理论分析结果都比较接近。单轴对称截面铰支拱在两端相等的负弯矩作用下,屈曲荷载随着拱圆心角的增大而逐渐增大。

表 2 单轴对称截面拱受两端正弯矩作用下的
弯扭屈曲荷载的相对值 M_{cr}/M_{cr0}

Table 2 Flexural-torsional buckling load M_{cr}/M_{cr0} of
Mono-Symmetric arch under positive bending

研究者	圆心角 α						
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Lim 等 ^[9]	1.000	0.608	0.364	0.216	0.120	0.052	0.00
Trahair 等 ^[8]	1.000	0.598	0.335	0.172	0.073	0.018	0.00
式(17)	1.000	0.612	0.368	0.218	0.119	0.048	0.00
简化式(21)	1.000	0.618	0.377	0.229	0.130	0.058	0.00
有限元结果	0.990	0.604	0.364	0.219	0.123	0.053	0.00

表 3 单轴对称截面拱受两端负弯矩作用下的
弯扭屈曲荷载的相对值 M_{cr}/M_{cr0}

Table 3 Flexural-torsional buckling load M_{cr}/M_{cr0} of
Mono-Symmetric arch under negative bending

研究者	圆心角 α						
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Lim 等 ^[9]	1.000	1.568	2.350	3.274	4.272	5.310	6.369
Trahair 等 ^[8]	1.000	1.580	2.358	3.269	4.253	5.278	6.326
式(17)	1.000	1.570	2.353	3.275	4.270	5.305	6.361
简化式(21)	1.000	1.574	2.356	3.274	4.265	5.294	6.345

4 结论

(1) 采用精确的翘曲位移表达式,根据变分原理给出了任意截面曲梁的平衡微分方程。

(2) 单轴对称截面圆弧拱在径向均布荷载作用下或两端等弯矩荷载作用下,要么发生曲率平面内弯曲失稳,要么发生曲率平面外的弯扭失稳。

(3) 给出了单轴对称截面圆弧拱在均布径向荷载和两端等弯矩荷载作用下的弯扭屈曲荷载的理论解。在推导中对一些无碍结果的项进行了简化,有效减小了公式的冗长,更有利于在实际工程中的应用。通过数值算例的比较验证了所推导公式的正确性。

参考文献:

- [1] 杨永华, 陈以一. 双轴对称固支圆弧拱弯扭屈曲荷载的理论解[J]. 工程力学, 2008, 25(4): 1—4, 20.
Yang Yonghua, Chen Yiyi. Theoretic solution for flexural-torsional buckling load of elastic fixed circular arches [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(4): 1—4, 20. (in Chinese)
- [2] Rajasekaran S, Padmanabhan S. Equations of curved beams [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(5): 1094—1111.
- [3] Papangelis T P, Trahair N S. Flexural-torsional stability of arches [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1987, 113(4): 889—906.
- [4] Pi Y L, Bradford M A. Elastic flexural-torsional buckling of fixed arches [J]. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 2004, 57(4): 551—569.
- [5] Kang Y J, Yoo C H. Thin walled curved beams II: Analytical solution for buckling of arches [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1994, 120(10): 2102—2125.
- [6] Pi Y L, Bradford M A, Tin-Loi F. Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(7): 2401—2425.
- [7] 童根树, 许强. 薄壁截曲梁线性和非线性分析理论[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
Tong Genshu, Xu Qiang. Linear and nonlinear analytical theories of thin-walled section curved beams [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [8] Trahair N S, Papangelis J P. Flexural-torsional buckling of mono-symmetric arches [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1987, 113(10): 2271—2289.
- [9] Lim N H, Kang Y J. Out of plane stability of circular arches [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2004, 46: 1115—1137.
- [10] Usami T, Koh S. Large displacement theory of thin-walled curved members and its application to lateral-torsional buckling analysis of circular arches [J]. International Journal of Solids and Structures, 1980, 16: 71—95.
- [11] 陈骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
Chen Ji. The theory of Stability and design for steel structure [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)