

文章编号: 1000-4750(2007)04-0142-05

基于牛顿-拉普森迭代和零阶优化算法的 悬索结构找形研究

*郭 彤, 李爱群, 王 浩

(东南大学土木工程学院, 江苏, 南京 210096)

摘 要: 基于牛顿-拉普森迭代对悬索体系的找形进行了研究,同时采用零阶优化算法对迭代进行优化控制,并对影响求解精度的因素进行了分析。在此基础上,针对恒载状态下的润扬大桥悬索桥进行了算例分析,并与膜理论计算结果和竣工试验中的实测数据进行了比较。算例表明,利用优化算法对控制点的标高变化进行控制,可以更加准确地得到主缆的线形及其内力。该方法不仅可以应用于悬索桥主缆的找形,同样也适用于其它大跨缆索结构的找形和施工控制。

关键词: 牛顿-拉普森迭代; 优化算法; 悬索; 几何形状; 非线性

中图分类号: U448.25 **文献标识码:** A

RESEARCH IN FORM-FINDING OF SUSPENSION STRUCTURES BASED ON NEWTON-RAPHSON ITERATION AND ZERO ORDER OPTIMIZATION ARITHMETIC

*GUO Tong, LI Ai-qun, WANG Hao

(College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: To find the form of suspension cables precisely, the Newton-Raphson iteration is used and the zero order optimization arithmetic is also dedicated to control the procedure. Meanwhile, the factors that influence the precision of solution are analyzed. Based on this, the form-finding of Runyang suspension bridge under dead load is taken as an example, and the results are compared with those of membrane theory and data from field test. The results show that through the control of the coordinate of the predefined points, the more precise solution can be achieved. This method can be used in form-finding and construction control on main cables of suspension bridge and other long-span cable structures.

Key words: Newton-Raphson iteration; optimization arithmetic; suspension cable; geometrical form; nonlinearity

由于大跨悬索结构存在着显著的非线性特征,使得悬索体系的找形成为其结构分析中的难点之一。针对缆索体系的非线性模拟和找形研究,前人已经作了不少工作,并先后提出了弹性理论、挠度

理论、膜理论、有限位移理论等分析方法^[1~4],而近年来的有限元方法为缆索体系的非线性分析和找形提供了更为精确的工具,因而在悬索结构的设计和分析中得到了日益广泛的应用。

收稿日期: 2005-08-18; 修改日期: 2006-04-06

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(50538020, 50608017); 高等学校科技创新工程重大项目培育资金项目(704024)

作者简介: *郭 彤(1977), 男, 山东青岛人, 讲师, 博士, 从事结构健康监测研究(E-mail: civilcenter@163.com);

李爱群(1962), 男, 安徽合肥人, 教授, 博士, 博导, 从事结构振动控制与结构健康监测研究;

王 浩(1979), 男, 江西鹰潭人, 博士生, 从事结构健康监测研究。

润扬大桥是由悬索桥和斜拉桥组合而成的特大型缆索支承型桥梁。其中,南汊悬索桥为主跨1490m的单跨双铰简支钢箱梁桥,跨度为中国第一、世界第三。为了精确地计算其缆索体系在成桥状态下的几何形状和内力,为后续研究提供较为可靠的分析模型,本文采用牛顿-拉普森迭代对恒载状态下的悬索桥主缆进行了找形研究,为了保证求解的正确性,采用零阶优化算法对迭代中控制点的坐标变化进行控制,通过两层循环控制,最终得到了较为准确的悬索几何形态。

1 牛顿-拉普森迭代

对于线性行为,可以通过计算一系列的联立线性方程来预测结构的响应。然而,对于非线性行为,就不能直接用这样一系列的线性方程表示。此时,需要一系列的带校正的线性近似来求解非线性问题。

根据能量最小原理,可以得到如下具有普遍形式的结构刚度方程:

$$[K]\{u\} = \{F^a\} \quad (1)$$

式中: $[K]$ ——结构刚度矩阵(与 $\{u\}$ 相关);

$\{u\}$ ——节点位移向量;

$\{F^a\}$ ——节点荷载向量;

牛顿-拉普森(Newton-Raphson)平衡迭代可以表达为下列方程式^[5,6]:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{NR}\} \quad (2)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (3)$$

式中: $[K_i^T]$ ——Jacobian 刚度矩阵(正切矩阵);

i ——当前平衡迭代步下标;

$\{F_i^{NR}\}$ ——单元内部抗力(回复力)向量;

$[K_i^T]$ 和 $\{F_i^{NR}\}$ 均通过初步给定的 $\{u_i\}$ 得到,式

(1)右侧代表不平衡荷载,通过下面的运算可以将这一不平衡荷载减小至可接受的范围内。

(1) 设定 $\{u_0\}$ 。 $\{u_0\}$ 通常是上一平衡步得到的解,对于初始荷载步, $\{u_0\} = \{0\}$;

(2) 通过 $\{u_i\}$ 计算更新后的正切刚度矩阵 $[K_i^T]$ 和回复力 $\{F_i^{NR}\}$, 如图 1;

(3) 利用式(2)计算 $\{\Delta u_i\}$;

(4) 将 $\{\Delta u_i\}$ 加到 $\{u_i\}$, 由此获得下一个预计坐标向量 $\{u_{i+1}\}$, 如式(3);

(5) 重复(2)~(4)过程直至计算收敛。

为了提高迭代的收敛性和效率,在 NR 法的基础上,先后提出了修正的牛顿-拉普森迭代(MNR)、

拟牛顿-拉普森法(QNR)等^[4], 这些方法各有其适用范围。一般说来, NR 法需要的迭代次数较少,而且在处理软化的或硬化的结构时,可使用较大的步长;但在作塑性分析时,为保证比例加载条件成立,加载步不得不取得很小,此时 NR 法就不如 MNR 法好。MNR 法不需重新形成切线刚度矩阵,但增加了迭代次数,在非线形分析中常存在收敛速度慢和发散的问题,不适用于大变形问题,对于材料非线性问题,往往难以收敛。QNR 法是从简化形成切线刚度矩阵而逐步演变来的,如以差商代替导数(或以割线代替切线)等,该方法可以提高迭代的收敛性。

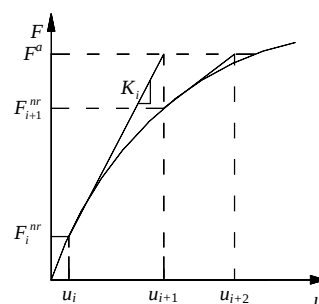


图 1 牛顿-拉普森平衡迭代

Fig.1 Newton-Raphson balanced iteration

对于一般复杂程度的非线性问题, NR 迭代可以很快得到收敛解,然而对于大跨缆索体系,由于缆索的应力刚度不可忽略,而缆索的应力情况受其几何形状 $\{u\}$ 的影响,因此在 $\{u\}$ 未定的情况下, $[K]$ 也是不确定的,迭代可能存在若干组解。当残余位移 $\{\Delta u_i\}$ 趋于零时,迭代收敛,体系已处于平衡状态,表面上求解已经结束,然而此时控制点的坐标却仍可能偏离目标值,并且偏离的大小随初始应力刚度 $[K]_0^s$ 的取值而变化。为了获得缆索几何形状的真实解,就需要增加 NR 迭代的约束条件,使得找形后的控制点达到预定标高,换言之,需要在若干个可能解中寻找满足约束条件的最优解。为了实现这一目标,本文采用了零阶优化算法来实现对 NR 迭代的控制。

2 零阶优化算法

根据本研究的特点,选择零阶优化算法^[7~9]作为 NR 迭代的外层控制。此时,带有约束条件的优化问题可作如下表述。

优化目标:

$$f = \min\{f(x)\}, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_i] \quad (4)$$

设计变量的选值范围:

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (5)$$

状态变量的选值范围:

$$\begin{cases} g_i(x) \leq g_i^u, & (i=1,2,3,\dots,m_1) \\ h_i^l \leq h_i, & (i=1,2,3,\dots,m_2) \\ w_i^l \leq w_i(x) \leq w_i^u, & (i=1,2,3,\dots,m_3) \end{cases} \quad (6)$$

在零阶方法中, 程序将优化循环生成的目标函数、状态变量与设计变量的关系拟合成曲线(曲面), 并在下一步迭代中, 用新生成的数据更新拟合好的曲线(曲面)。函数曲线(曲面)的形式可采用线性拟合、平方拟合或者平方加交叉项拟合。

对于目标函数, 假定其拟合公式为平方拟合, 则拟合公式为:

$$\hat{f} = a_0 + \sum_i^n a_i x_i + \sum_i^n \sum_j^n b_{ij} x_i x_j \quad (7)$$

对于设计变量和状态变量的约束条件, 可采用罚函数的方法将其转化为无约束方程(式(12)), 从而将带有约束的优化问题转化成无约束的最小值求解问题。

$$\hat{f} = \hat{f}(x) \quad (8)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (9)$$

$$\hat{g}_i(x) \leq \hat{g}_i^u + \alpha_i \quad (i=1,2,3,\dots,m_1) \quad (10)$$

$$\hat{h}_i^l - \beta_i \leq \hat{h}_i(x) \quad (i=1,2,3,\dots,m_2) \quad (11)$$

$$\hat{w}_i^l - \gamma_i \leq \hat{w}_i(x) \leq \hat{w}_i^u + \gamma_i \quad (i=1,2,3,\dots,m_3) \quad (12)$$

$$F(x, p_k) =$$

$$\hat{f} + f_0 p_k \left(\sum_{i=1}^n X(x_i) + \sum_{i=1}^{m_1} G(\hat{g}_i) + \sum_{i=1}^{m_2} H(\hat{h}_i) + \sum_{i=1}^{m_3} W(\hat{w}_i) \right) \quad (13)$$

式中, x_i 为设计变量, x_i^l 、 x_i^u 分别是 x_i 的下限和上限, $\hat{g}_i$ 、 $\hat{h}_i$ 、 $\hat{w}_i$ 为状态变量, α_i 、 β_i 、 γ_i 代表它们的容差。当设计变量(或状态变量)接近限值时, 其惩罚函数 $X(x_i)$ 的数值急剧增加。

$$X(x_i) = \begin{cases} c_1 + c_2 / (x^u - x_i) & \text{若 } x_i < x^u - \varepsilon (x^u - x^l) \\ c_3 + c_4 / (x_i - x^l) & \text{若 } x_i \geq x^u - \varepsilon (x^u - x^l) \end{cases} \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (14)$$

式中: c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 ——系数;

ε ——极小的正数;

转化为无约束问题后, 即可采用序贯无约束极小化方法(SUMT)来搜索无约束目标函数。

对于本问题中设计变量的确定, 由于迭代中控制点的坐标变化误差的大小随初始应力刚度 $[K]_0^s$ 的取值而变化, 而 $[K]_0^s$ 主要由主缆应力刚度提供, 因此主缆初应力的取值对于结果的正确性至关重要。主缆的初始线形和初始应力可根据膜理论^[3]基

本公式(式(15)、式(16))得到并将其作为优化迭代的初始值。

$$H = ql^2 / (8f) \quad (15)$$

$$y = 4fx(l-x)/l^2 \quad (16)$$

式中 q 为换算均布荷载, l 为主缆跨度, f 为垂度, H 为主缆水平分力, x 、 y 分别为计算点到鞍座的水平、竖向距离。

由于膜理论只提供了主缆应力的近似估计, 若直接利用这一初始值进行 NR 迭代, 控制点的坐标变化将有较大的偏差, 因此需要利用零阶算法来优化主缆各单元的应力取值。由于主缆各个单元的应力各不相同, 若直接将这些单元的应力取为设计变量, 设计变量的数目将多达数十个。考虑到主缆应力的水平分量处处相等, 因此可用主缆应力的水平分量 S_H 以及各点的斜率来表示各单元的应力 S_i , 即 $S_i = S_H / \cos \alpha_i$, α_i 为各点切线与水平线的夹角。最终将 S_H 取为优化的设计变量, α_i 随 NR 迭代后的节点坐标变化而更新。

在恒载状态下, 主缆体系中只有两个塔顶坐标和主缆的跨中坐标是已知的, 这里取跨中的主缆节点作为优化控制点。优化的目标函数定为 $f = \min |y_0 - \bar{y}_0|$, y_0 和 $\bar{y}_0$ 分别代表跨中主缆节点竖向坐标的优化值和设计值。

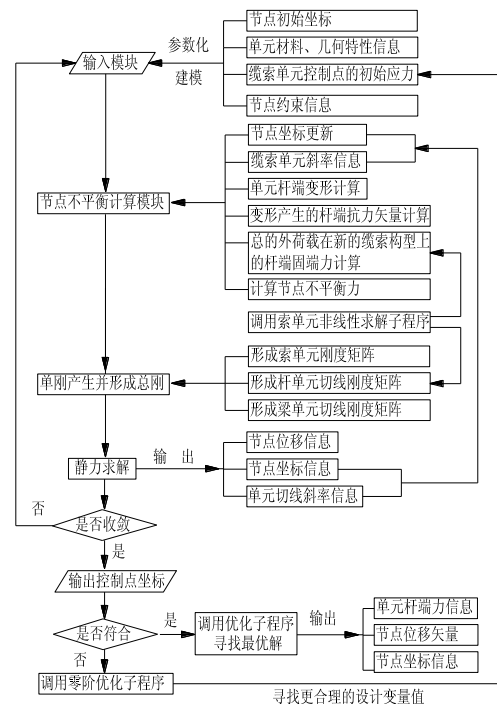


图2 悬索结构找形的基本流程

Fig.2 Basic procedure of form-finding of suspension structures

3 悬索结构找形的基本流程

根据上述的 NR 迭代以及零阶优化算法, 悬索结构的找形过程可表述为如下的流程, 参见图 2。

4 算例

利用本文介绍的 NR 迭代和零阶优化算法对润扬大桥悬索桥主缆进行找形。由于成桥状态下桥塔左右两侧的拉力是平衡的, 即桥塔在成桥时的设计受力状态为轴向受压, 为了简化分析过程, 将主缆在索塔顶处的支承方式设为铰支, 并将三维的空间问题先转化为二维的平面问题, 即只考虑在主缆平面内的变形问题, 主缆平面外的位移预先进行约束, 相应地, 主梁的荷载和平面内刚度折减为 1/2。

为了保证迭代的正确性, 需要选择适当的收敛准则, 在收敛准则中所用的基本求解变量有三种, 即位移、不平衡力和增量能量。以位移为基础的收敛仅提供了表观收敛的相对量度, 图 3 给出了一种单独使用位移收敛检查导致出错的情况。在第二次迭代后, 计算出的位移很小, 可能被认为是收敛的解, 然而实际该解仍偏离真正的解。要防止这样的错误, 应尽量使用基于力或增量能量的收敛准则, 因为以力或增量能量为基础的收敛提供了收敛的绝对量度。在本文的迭代过程中, 采用了力与位移的组合作为收敛条件, 即 $\text{Max}\{|\Delta F_1/F_1|, \dots, |\Delta F_n/F_n|\} < \alpha_1$, 且 $\text{Max}\{|\Delta U_1/U_1|, \dots, |\Delta U_n/U_n|\} < \alpha_2$ ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.001$), 计算的终止条件为 $\text{Max } U \leq 0.001\text{m}$ 。

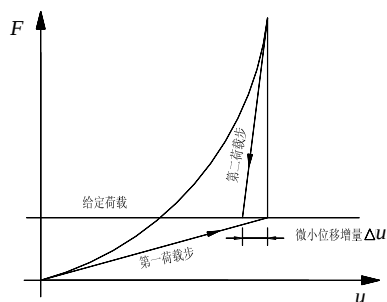


图 3 单独依赖位移收敛检查有时可能产生错误的结果

Fig.3 Possible wrong solution using single displacement criteria

在悬索的找形过程中, 共包含了两个层次的循环控制, 在第一层次即控制点坐标变化的优化控制中, 预设了 20 个荷载步, 实际收敛于第 11 步, 最优解为第 7 步(图 4), 跨中点最优初应力为 508.177MPa, 迭代引起的控制点位移误差为

-0.53526mm, 满足设计要求。此外, 从图中还可以看出, 优化前, 跨中控制点的坐标改变将达到 0.13m, 对于悬索桥较高的施工安装精度, 这显然是不能接受的, 这也说明采用优化算法对控制点坐标变化量进行控制是十分有必要的。

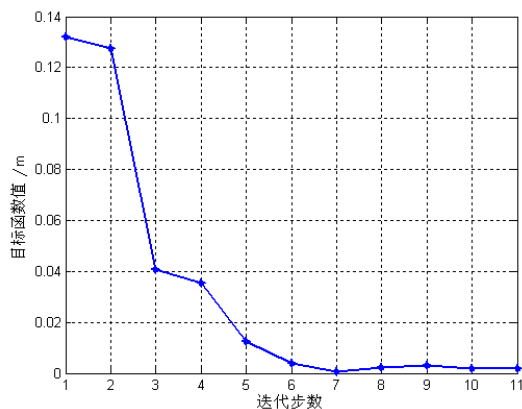


图 4 目标函数值随迭代步的变化情况

Fig.4 Change of objective function value with set number

图 5(a)给出了找形前的悬索结构的变形情况, 悬索的位移采用矢量箭头表示, 从图中可以看出, 悬索的各个点的位移较为不一致, 箭头方向有正有负, 最大的不平衡点在跨中附近, 绝对值为 0.191m, 主缆整体的不平衡超过 0.3m。

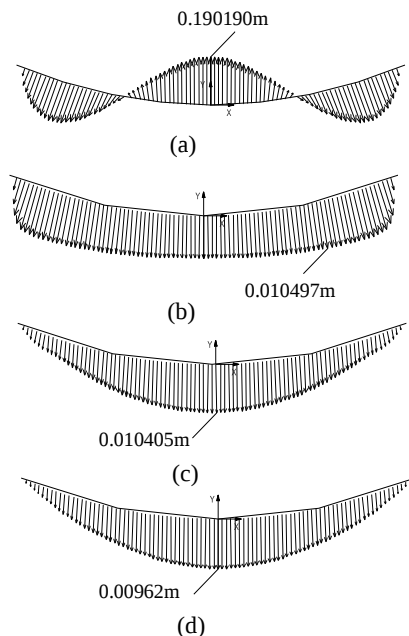


图 5 各荷载步的悬索位移图

Fig.5 Displacement diagram of suspension cable of different iterations

在最优初应力下(第 7 步), NR 迭代的结果如图 4 所示。图 5(b)为第一荷载步后的悬索结构变形, 最大值为 0.010497m, 并且位移矢量箭头指向比第

一荷载步趋于均匀,说明第一荷载步的迭代效率是比较高的。图 5(c)为第二荷载步后的悬索结构变形,最大值为 0.010405m。当悬索结构的最大不平衡位移小于 0.001m 时,迭代终止,总共进行了 51 步迭代,观察此时的悬索结构变形(图 5(d)),可以看出,此时各点的位移矢量已趋于均匀,并且最大的位移值变为 0.000962m,达到了预先设定的目标。观察迭代前后主缆的竖向坐标变化情况(图 6)可知,迭代后离主塔 1/4 跨附近的主缆坐标有较大降低,最大为 33#吊点,达到了 0.247m,这说明按照膜理论建

立的主缆初始坐标偏大,相应的吊索长度也偏大。对于 60m~120m 长的吊索,制造的允许误差一般仅仅为 5.0mm^[3],因此利用本文的 NR 迭代和优化算法进行悬索的精细找形就显得非常必要了。

下面利用润扬大桥悬索桥的竣工试验数据对找形和修正^[10,11]后的模型进行验证,试验的加载工况见表 1。由表 1 中的数据对比可知,找形后各工况下的静力位移计算值与实测值较为接近,最大误差在厘米级。这说明找形后的模型精度较高,基本可以满足后续分析的需要。

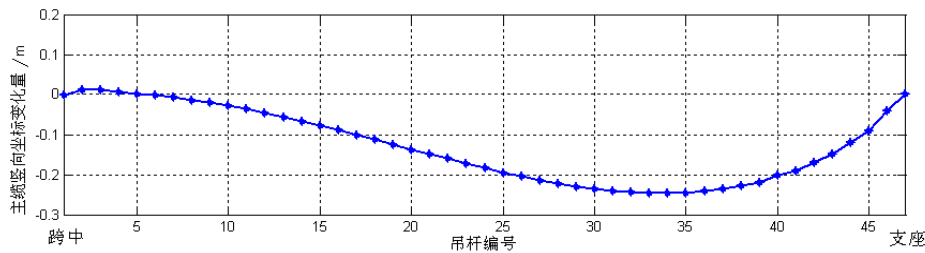


图 6 迭代后竖向坐标变化值(以重力方向为负方向)

Fig.6 Change of vertical coordinate after iterations (direction of gravity is the positive direction)

表 1 主梁竖向挠度对比

Table 1 Comparison of vertical displacements of box girder obtained from calculation and field test

	1/8 跨		1/4 跨		3/8 跨		1/2 跨		试验加载工况
	实测	计算	实测	计算	实测	计算	实测	计算	
工况 1 位移/m	-1.4415	-1.421	-2.831	-2.830	-1.479	-1.463	0.106	0.097	主梁中跨 L/4 截面。52 辆车排成 4 列 13 行,行距 16.1m,横桥向对称。
工况 2 位移/m	0.4225	0.421	0.0615	0.059	-1.1565	-1.071	-2.416	-2.417	主梁中跨 L/2 截面。52 辆车排成 4 列 13 行,行距 16.1m,横桥向对称。

注: 挠度以向下为正,为全站仪测量结果,加载车辆为 300kN 标准车。

5 结语

NR 迭代可以较好地模拟缆索体系的非线性特征,并且收敛速度较快。本文对影响悬索找形精度的因素进行了分析,并选择零阶优化算法作为 NR 迭代的外层控制,以保证找形结果的正确性。针对恒载状态下的润扬大桥悬索桥主缆的找形,本文进行了算例分析,并与膜理论的计算结果和成桥试验数据进行了比较。计算结果表明,通过对控制点标高变化的控制,可以更加准确地得到主缆的线形及其内力。该方法不仅可以应用于悬索桥主缆的找形,同样也适用于其它大跨缆索结构的找形和施工控制。

参考文献:

[1] Leonard, John William. Tension structures: behavior and

analysis [M]. New York: McGraw-Hill, 1988.

[2] Tabarrok B, Qin Z. Nonlinear analysis of tension structures [J]. Computers & Structures, 1992, 45(5/6): 973~984.

[3] 潘永仁. 悬索桥结构非线性分析理论与方法[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004.

Pan Yongren. Non-linear analysis theory method for suspension bridge structures [M]. Beijing: China Communications Press, 2004. (in Chinese)

[4] 钱若军, 杨联萍. 张力结构的分析 设计 施工[M]. 南京: 东南大学出版社, 2003.

Qian Ruojun, Yang Lianping. Analysis, design and construction of tension structures [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2003. (in Chinese)

[5] Bathe K J. Finite element procedures in engineering analysis [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.