

文章编号: 1000-4750(2006)04-0022-06

不同拉压模量及软化特性材料的球形孔 扩张问题的统一解

*罗战友^{1,2}, 夏建中², 龚晓南³

(1. 浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100; 2. 浙江科技学院岩土工程研究所, 杭州 310012; 3. 浙江大学岩土工程研究所, 杭州 310027)

摘 要: 对于具有不同的拉压模量及软化特性的岩土类材料, 提出了不同拉压模量及软化特性的控制参数, 采用双剪统一强度理论推导了球形孔扩张问题的应力及位移的统一解。分析了模量、模型和软化等控制参数对球形孔扩张时的扩张压力、塑性区开展规律及应力场的影响。结果表明: 圆孔极限扩张压力, 塑性区的发展规律, 应力场, 位移场等均随着模量控制参数、模型参数及软化参数的变化而变化, 因此若采用经典的弹性理论、单一的模型参数及传统的不考虑应变软化来对岩土类的工程材料进行设计计算, 必会带来较大的误差。

关键词: 球形孔扩张问题; 岩土类材料; 双剪统一强度理论; 不同模量弹性理论; 应力跌落软化模型

中图分类号: TU431; TU452 **文献标识码:** A

UNIFIED SOLUTION FOR THE EXPANSION OF SPHERICAL CAVITY IN STRAIN-SOFTENING MATERIALS WITH DIFFERENT ELASTIC MODULI IN TENSILE AND COMPRESSION

*LUO Zhan-you^{1,2}, XIA Jian-zhong², GONG Xiao-nan³

(1. Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China;

2. Geotechnical Engineering Institute, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China;

3. Geotechnical Engineering Institute, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: For strain-softening materials with different elastic moduli of tensile compression, two controlling parameters were introduced to take into account the different moduli and strain-softening properties. By means of twin shear unified strength theory, unified solutions for calculating stress and displacement fields of expansion of spherical cavity were derived. The effects caused by different elastic moduli in tensile and compression, by different models and strain-softening rates on stress and displacement fields, and by the development of plastic zone were analyzed. The results show that the ultimate expansion pressure, stress and displacement fields, and development of plastic zone vary with the changes of elastic moduli, models, and strain-softening properties. If classical elastic theory and single model are adopted and strain-softening properties are neglected, large errors may be induced.

Key words: expansion of spherical cavity; geomaterials; twin shear unified strength theory; elastic theory with different moduli in tension and compression; stress-dropping softening model

收稿日期: 2004-04-20; 修改日期: 2005-07-17

作者简介: *罗战友(1975), 男, 河南临颖人, 讲师, 博士, 从事静力压桩、地基处理及智能岩土力学等方面的研究(E-mail: lzy0395@163.com);

夏建中(1965), 男, 江苏人, 副教授, 博士, 从事地基处理、软粘土力学等方面的研究;

龚晓南(1944), 男, 浙江金华人, 教授, 博士, 博导, 岩土工程学报、土木工程学报、工程力学学报编委。

球形孔扩张理论广泛地应用于隧道、井筒、沉桩等问题的应力分析，以及旁压仪等土工原位测试仪器的机理分析。Vesic 于 1974 年分析了球形孔的扩张问题，并给出了其的一般解^[1]。但 Vesic 假定土体是理想弹塑性体，且土体是拉压模量相同的材料，这些假定对于一般材料尚可接受，但对于岩土类材料，势必造成较大的误差。龚晓南曾指出三轴压缩和三轴伸长试验表明土体抗压与抗拉特性有较大的差异，不可忽视^[2]。而且这类材料的应力应变关系曲线有明显的峰值，峰值后应力随变形增大而降低，即出现应变软化，最后达到残余强度，其典型的应力应变关系曲线如图 1 所示。

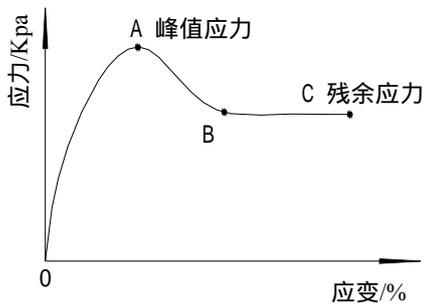


图 1 应变软化的典型关系曲线

Fig.1 Representative strain-softening curve

在应变软化范围内，由于应力增量与应变增量的内积为负值，即为负功，使得数值模拟分析结果并不唯一，这一现象已由 Prevost^[3]和沈珠江^[4]提出。为了突出反映岩土类软化材料达到强度峰值后的应变软化性质，本文采用应力跌落软化模型来模拟^[5,6]，如图 2 所示。

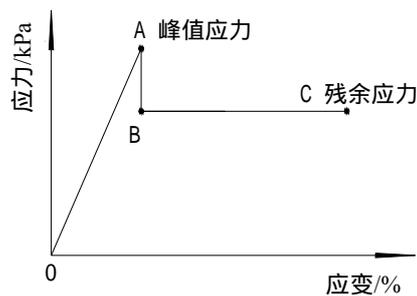


图 2 应力跌落软化模型

Fig.2 Stress-dropping softening model

1 球形孔扩张问题

对于具有拉压模量不同及应力跌落软化材料所构成的球形孔，当孔内壁作用有扩张压力 p 时，其的扩张规律与理想弹塑性材料的球形孔扩张规律

不同。

图 3 为无限体中球形孔扩张问题的平面图示，在孔内壁作用有压力 p 时，径向受压，切向受拉。 p 较小时，孔周围介质处于弹性状态；当 p 值增加并达到某一临界值 p_c 时，孔周围介质将发生屈服，形成损伤面 S_c ，随着 p 值增大，损伤面 S_c 向外运动， S_c 面上应力发生跌落，形成一个环状球形损伤区（塑性区 D_d ）。由于发生应力跌落，故 S_c 面为应力间断面，此面上法向正应力、切平面剪应力连续，而切向正应力间断，但此面以外仍为弹性区域 D_e 。图 3 中 a_0 为柱孔半径， a 为扩张后球孔半径， r_1 为损伤面半径， p 为孔内扩张压力。

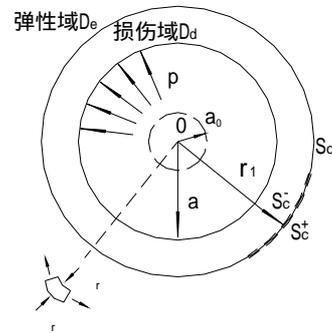


图 3 球形孔扩张问题

Fig.3 Expansion of spherical cavity

1.1 基本方程

除了应力应变关系及不同的拉压弹性模量这两个假定之外，其余假定同 Vesic^[1]的圆孔扩张理论。

平衡方程：

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (1)$$

几何方程：

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad (2)$$

变形协调方程：

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (3)$$

根据不同模量的弹性理论^[7,8]，弹性变形阶段的本构方程为：

$$\begin{cases} \varepsilon_r = a_{11}\sigma_r + 2a_{12}\sigma_\theta \\ \varepsilon_\theta = (a_{22} + a_{12})\sigma_\theta + a_{12}\sigma_r \end{cases} \quad (4)$$

式中： $a_{ij} = f(E^+, E^-, \nu^+, \nu^-)$ ，且通常 $a_{ij} = a_{ji}$ ， E 和 ν 的上标“+”和“-”分别代表压缩和拉伸。

对于球形孔扩张问题：

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E^+} \\ a_{22} &= \frac{1}{E^-} \\ a_{12} &= a_{21} = -\frac{\nu^-}{E^-} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

于是式(4)可写成下述形式：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E^+} \sigma_r - \frac{2\nu^+}{E^+} \sigma_\theta \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E^-} (1-\nu^-) \sigma_\theta - \frac{\nu^-}{E^-} \sigma_r \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由于双剪统一强度理论能够包含Mohr-Coulomb度理论和双剪屈服强度理论等八种强度准则，且具有统一的数学表达式^[9,10]，因此塑性变形阶段采用双剪统一强度理论。

对于平面应变问题^[11]，其初始屈服函数为：

$$F = \sigma_r - \eta \sigma_\theta - \sigma_s = 0 \quad (\text{定义于 } S_c^+ \text{ 上}) \quad (7a)$$

式中：模型参数 $\eta = \frac{m(n+2)}{2+2n-mn}$ ， $\sigma_s = \frac{2(1+n)\sigma_t}{2+2n-mn}$ ，

而 m, n 为材料参数，可以通过实验测得拉伸、压缩、剪切强度 $\sigma_t, \sigma_c, \tau_s$ 后，再由下式确定：

$$m = \frac{\sigma_t}{\sigma_c}, \quad n = \frac{(1+m)\tau_s - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_s}$$

后继屈服函数：

$$f = \sigma_r - k_1 \eta \sigma_\theta - k_2 \sigma_s = 0 \quad (\text{定义于 } D_d \text{ 上}) \quad (7b)$$

式中： k_1, k_2 为损伤软化参数，由试验确定。

1.2 弹塑性分析的统一解

(1) 弹性区 D_e

$$(D_e = \{r | r \geq a, p \leq p_c\} \cup \{r | r \geq r_1, p \leq p_c\})$$

选取应力函数 $\psi(r)$ ，使 σ_r 和 σ_θ 分别为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\psi}{r} \\ \sigma_\theta &= \frac{d\psi}{dr} + \frac{\psi}{r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

结合式(3)，式(4)，式(5)和式(8)可得：

$$r^2 \frac{d^2 \psi}{dr^2} + 2r \frac{d\psi}{dr} - 2 \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}} \psi = 0 \quad (9)$$

解微分方程(9)得：

$$\psi(r) = At^{\frac{\lambda-1}{2}} + Bt^{\frac{\lambda+1}{2}} \quad (10)$$

式中：

A, B 为积分常数； t 是 r 的函数。

$$\lambda = \sqrt{1 + 8 \frac{a_{11} + a_{12}}{a_{22} + a_{12}}} = \sqrt{1 + 8 \frac{E^-(1-\nu^+)}{E^+(1-\nu^-)}} \quad (11)$$

将式(10)代入式(8)，利用边界条件确定积分常数 A

和 B 可得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha+3/2} \\ \sigma_\theta &= -\xi \cdot p \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha+3/2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中：

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{E^-(1-\nu^+)}{E^+(1-\nu^-)}} \\ \xi = \frac{E^- [1 - (\alpha + 1/2)\nu^+]}{E^+ [(1-\nu^-)(\alpha + 1/2) - 2\nu^-]}$$

将上式代入式(6)求得 ε_r ，再代入式(2)得：

$$u_r = -\frac{(1-\nu^-)(\alpha-1/2) + 2\nu^-}{2E^-} p \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha+3/2} r \quad (13)$$

上式为 $D_e = \{r | r \geq a, p \leq p_c\}$ 上的应力场、位移场计算公式，对于域 $D_e = \{r \geq r_1, p \leq p_c\}$ 上的公式，只需将 a 改为 r_1 ， p 改为 p' 即可。 r_1 为塑性区半径， p' 为 S_c^+ 上的法向应力。

(2) 塑性区 D_d

$$(D_d = \{r | a \leq r < r_1, p > p_c\})$$

孔内压力 p 增至为临界扩张压力 p_c 时，孔壁开始进入塑性状态，此时 $r_1 = a$ 。把式(12)代入式(7a)得：

$$p_c = \frac{\sigma_s}{1 + \xi \eta} \quad (14)$$

当 $p > p_c$ 时，损伤面 S_c 向外扩张，出现应力跌落并形成塑性环 D_d 。

由式(1)、式(7b)及边界条件 $r = a$ ， $\sigma_r = p$ 可得域 D_d 内的应力场为：

$$\sigma_r = \left(p + \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2(1-k_1 \eta)}{k_1 \eta}} - \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \quad (15a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{k_1 \eta} \left(p + \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{2(1-k_1 \eta)}{k_1 \eta}} - \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \quad (15b)$$

当 $r = r_1$ 时， $\sigma_{r_1} = p_c = \frac{\sigma_s}{1 + \xi \eta}$ ，故式(15a)变为：

$$p = \left(\frac{\sigma_s}{1 + \xi \eta} + \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \right) \left(\frac{r_1}{a} \right)^{\frac{2(k_1 \eta - 1)}{k_1 \eta}} - \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \quad (16)$$

随着塑性区的扩大，当 p 达到极限压力 p_u 时，塑性区半径 r_1 达到最大半径 r_{\max} ，此时：

$$p_u = \left(\frac{\sigma_s}{1 + \xi \eta} + \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \right) \left(\frac{r_{\max}}{a} \right)^{\frac{2(k_1 \eta - 1)}{k_1 \eta}} - \frac{k_2}{k_1 \eta - 1} \sigma_s \quad (17)$$

现用 Δ 表示塑性区平均体积应变，考虑圆孔扩张后圆孔体积变化等于弹性区和塑性区体积变化之和，于是可得：

$$\left(\frac{r_{\max}}{a}\right)^3 = \frac{1}{\Delta + 3\beta - 3\beta^2} \left(1 + \Delta - \frac{a_0^3}{a^3}\right) \quad (18)$$

式中：

$$\beta = \frac{[(1-\nu^-)(\alpha-1/2) + 2\nu^-]\sigma_s}{E^-(1+\xi\eta)} \quad (19)$$

$$\Delta = \frac{\text{塑性区}\bar{m}\text{体积变化}}{\text{塑性区}\bar{m}\text{总体积}}$$

将式(18)代入式(17)可得：

$$p_u = \sigma_s \left(\frac{1}{1+\xi\eta} + \frac{k_2}{k_1\eta-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\Delta + 3\beta - 3\beta^2} \left(1 + \Delta - \frac{a_0^3}{a^3}\right) \right)^{\frac{2(k_1\eta-1)}{3k_1\eta}} - \frac{k_2}{k_1\eta-1} \sigma_s \quad (20)$$

若采用岩土工程常用的强度指标 c 和 φ ，则有 $m = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$ ， $\sigma_s = \frac{2c\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$ 。若再令 $n=0$ ，则双剪

统一强度理论变为 Mohr-Coulomb 准则，此时：

$$\eta = m = \frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

设软化后的残余强度指标为 c_r ， φ_r ，则

$$k_1\eta = \frac{1-\sin\varphi_r}{1+\sin\varphi_r}, \quad k_2\sigma_s = \frac{2c_r\cos\varphi_r}{1+\sin\varphi_r} \quad (21)$$

若假定材料为理想弹塑性体且拉压模量相同，即 $\varphi_r = \varphi$ ， $c_r = c$ ， $E^+ = E^-$ ， $\nu^+ = \nu^-$ ，且忽略小量 β^2 及 $(a_0/a)^2$ 项，则上式可变为：

$$p_u = \left[\frac{(1+\Delta)(3-\sin\varphi)E}{\Delta E(3-\sin\varphi) + 2(1+\nu)c\cos\varphi} \right]^{\frac{4\sin\varphi}{3(1+\sin\varphi)}} \times \left(\frac{4c\cos\varphi}{3-\sin\varphi} + c\cot\varphi \right) - c\cot\varphi \quad (22)$$

此式正是拉压模量相同时理想弹塑性材料的极限扩张压力的解答^[12]。上述的 Δ 是塑性区应力状态的函数，只有当应力状态为已知值时，才有可能确定平均塑性应变值 Δ ，因此常用迭代法求解。

在弹性区($r \geq r_1$)，结合式(12)及式(14)可得：

$$\sigma_r = \frac{\sigma_s}{1+\xi\eta} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha+3/2} \quad (23a)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\xi\sigma_s}{1+\xi\eta} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha+3/2} \quad (23b)$$

$$u_r = -\frac{\sigma_s[(1-\nu^-)(\alpha-1/2) + 2\nu^-]}{2E^-(1+\xi\eta)} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\alpha+3/2} r \quad (24)$$

2 比较分析

为了分析说明不同的拉压模量，不同的模型和不同的软化程度对扩张压力、塑性区的开展规律及应力场的影响，现以 $k_1=1$ ， $\Delta=0$ 的双剪屈服材料为例，考虑不同的拉压模量 ξ 、不同的模型参数 η ，及损伤软化参数 k_2 的影响，设 $E^+ = 1.0 \times 10^5 \text{ kPa}$ ， $\sigma_s = 2.0 \times 10^3 \text{ kPa}$ ， $\nu^+ = 0.3$ ， $a_0/a = 0.2$ 。

2.1 极限扩张压力 p_u 及临界扩张压力 p_c 随 ξ 、 η 及 k_2 的变化

从图(4)中可以看出，极限扩张压力 p_u 值随 k_2 的增大而升高，在相同的 k_2 下，随 ξ 值的减少而增大。图(5)中，极限扩张压力 p_u 随 k_2 值的减少而降低，随 η 值的增大而增大。而在图(6)及图(7)中，相同的 k_2 情况下，临界扩张压力 p_c 随 ξ 或 η 的增大而降低。

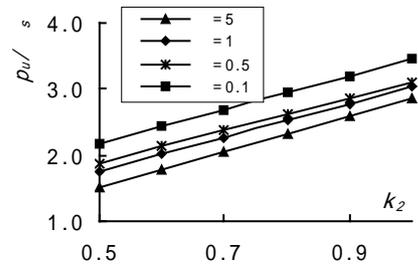


图4 p_u/σ_s 随 ξ 及 k_2 的变化曲线($\eta=1$)

Fig.4 p_u/σ_s vs ξ and k_2 curves ($\eta=1$)

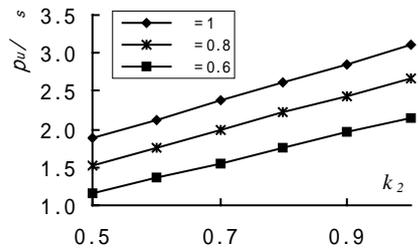


图5 p_u/σ_s 随 η 及 k_2 的变化曲线($\xi=0.5$)

Fig.5 $p_u/\sigma_s \sim \eta$ and k_2 curves ($\xi=0.5$)

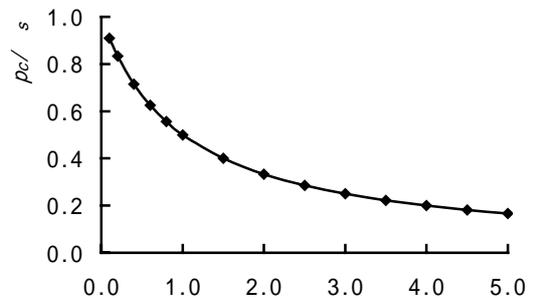


图6 p_c/σ_s 随 ξ 的变化曲线($k_2=1, \eta=1$)

Fig.6 p_c/σ_s vs ξ curve ($k_2=1, \eta=1$)

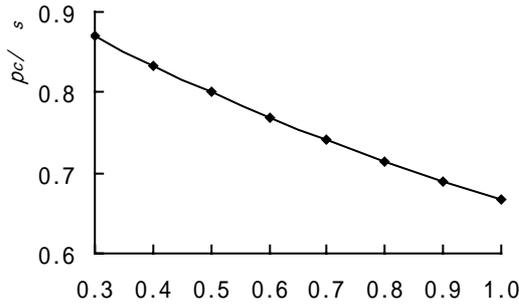


图7 p_c/σ_s 随 η 的变化曲线($k_2=1, \xi=0.5$)

Fig.7 p_c/σ_s vs η curve ($k_2=1, \xi=0.5$)

2.2 塑性区的开展规律

从图 8 中可以看出,当 ξ 及 η 保持不变时, k_2 越大, 扩张压力 p 随塑性区半径的增大其增长的越快。从图 9 可见, 当 k_2 及 η 保持不变时, 扩张压力 p 随塑性区半径的增大而增大, 但相同塑性半径时, p 却随 ξ 的增大而降低。在图 10 中, 当 k_2 及 ξ 保持不变时, 虽然 p 随塑性区半径的增大而增大, 但相同塑性半径时, p 却随 η 的增大呈现先小后大的特点。

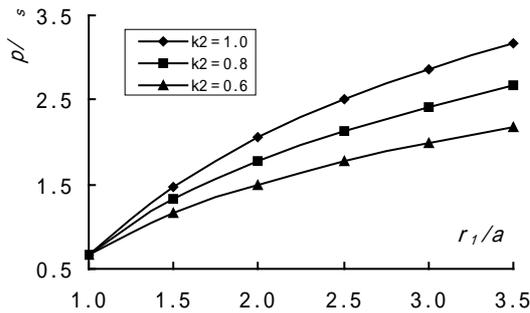


图 8 不同 k_2 时 p/σ_s 与 r_1/a 的关系曲线 ($\xi=0.5, \eta=1$)

Fig.8 p/σ_s vs r_1/a curves with different k_2 ($\xi=0.5, \eta=1$)

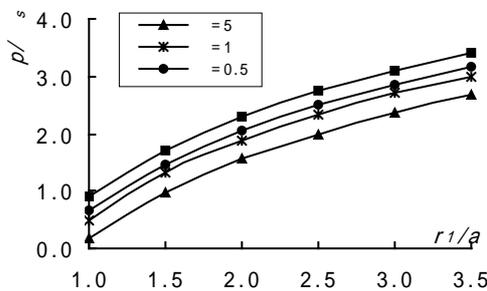


图 9 不同 ξ 时 p/σ_s 与 r_1/a 的关系曲线($k_2=1, \eta=1$)

Fig.9 p/σ_s vs r_1/a curves with different ξ ($k_2=1, \eta=1$)

2.3 应力场的变化规律

从图 11 可以看出,在某一扩张压力下,当 ξ 及

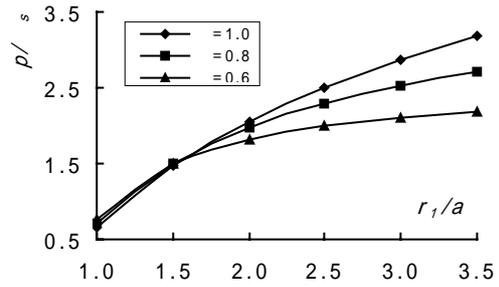


图 10 不同 η 时 p/σ_s 与 r_1/a 的关系曲线 ($k_2=1, \xi=0.5$)

Fig.10 p/σ_s vs r_1/a curves with different η ($k_2=1, \xi=0.5$)

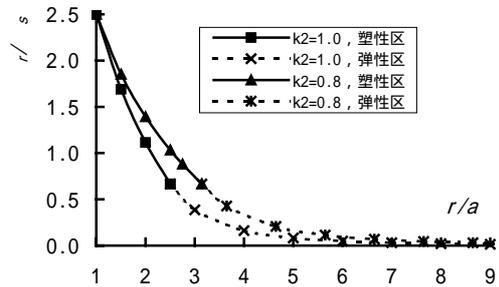


图 11 不同 k_2 时 σ_r/σ_s 与 r/a 关系曲线 ($\xi=0.5, \eta=1, p/\sigma_s=2.5$)

Fig.11 σ_r/σ_s vs r/a curves with different k_2 ($\xi=0.5, \eta=1, p/\sigma_s=2.5$)

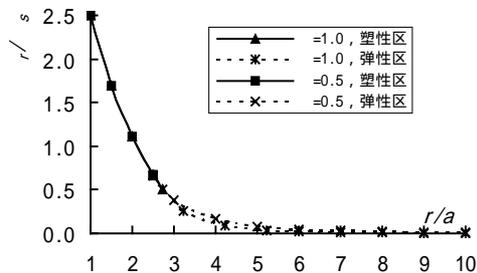


图 12 不同 ξ 时 σ_r/σ_s 与 r/a 关系曲线 ($k_2=1, \eta=1, p/\sigma_s=2.5$)

Fig.12 σ_r/σ_s vs r/a curves with different ξ ($k_2=1, \eta=1, p/\sigma_s=2.5$)

η 为一常数时, σ_r 随 k_2 不同, 与 r 的关系曲线也不同, 其曲线位置随 k_2 的增加而向下移动; 对临界扩张压力 p_c (图中虚线与实线相交的位置, 下同) 而言, 虽然值相同, 但其所对应的半径 r 却不同。由图 12 可见, 当 k_2 及 η 为一常数时, p_c 随 ξ 的减少而增大; 当半径 r 较小时 (σ_r 达到最大的 p_c 之前), 二者的曲线是一致的, 之后 σ_r 与 r 的关系曲线随 ξ 不同出现分叉。图 13 中, 当 k_2 及 ξ 保持不变时, σ_r 在相同的半径情况下, 其随 η 的增加而降低; 临界

扩张压力 p_c 不但其大小随 η 变化,而且与之对应的半径位置也不一样。从整体上看,图 11、图 12、图 13 中的应力状态随半径 r 的增加逐渐由塑性区转化为弹性区, σ_r 值也由大变小,但最终都趋向零。

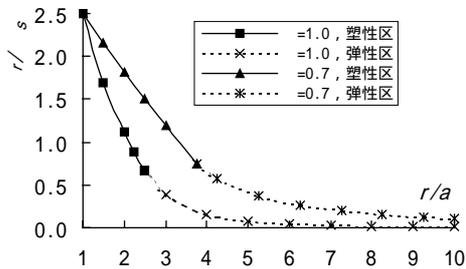


图 13 不同 η 时 σ_r / σ_s 与 r/a 关系曲线

($\xi = 0.5$, $k_2 = 1$, $p / \sigma_s = 2.5$)

Fig.13 σ_r / σ_s vs r/a curves with different η

($\xi = 0.5$, $k_2 = 1$, $p / \sigma_s = 2.5$)

3 结语

从以上分析可知,材料具有不同的拉压模量、不同的模型参数及不同的软化程度时,球形孔扩张问题的扩张压力,塑性区的发展规律,应力场等均随着模量参数 ξ 、模型参数 η 和软化系数 k_1 、 k_2 的变化而变化。对岩土类的工程材料(如岩石、结构性粘土等)而言,若采用经典的弹性理论($\xi = 0.5$)、统一的模型参数($\eta = 1$)及传统的不考虑应变软化($k_1 = 1.0$ 、 $k_2 = 1.0$)来进行设计计算,必会带来较大的误差。

参考文献:

- [1] Vesic A S. Expansion of cavities in infinite soil mass[J]. Proc.ASCE V98, SM3.1972, SM3: 265~291.
- [2] 龚晓南. 油罐软粘土地基性状[D]. 杭州: 浙江大学, 1984.
Gong Xiaonan. Oil tank foundation property of soft clay [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1984. (in Chinese)
- [3] Prevost J H, Hughes T J. Finite element solution of elastic-plastic boundary value problem [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 48: 69~74.
- [4] 沈珠江. 应变软化材料计算中的若干问题[J]. 江苏力学, 1982, (1): 6~9.

- Shen Zhujiang. Some problems of strain-softening material on computation[J]. Jiangsu Journal of Mechanics, 1982, (1): 6~9. (in Chinese)
- [5] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑材料软化特性的地基承载力分析计算[J]. 水利水运科学研究, 1996, 3(1): 42~47.
Jiang Mingjing, Shen Zhujiang. Computation and analyses of the bearing capacity of foundations with strain-softening behavior [J]. Science Research of Water Conversation and Conveyance, 1996, 3(1): 42~47. (in Chinese)
- [6] 蒋明镜, 沈珠江. 考虑剪胀的弹脆塑性软化柱形孔扩张问题[J]. 河海大学学报, 1996, (4): 65~72.
Jiang Mingjing, Shen Zhujiang. Expansion of cylindrical cavity with elastic-brittle-plastic softening and shear dilatation behavior [J]. Journal of Hehai University, 1996, (4): 65~72. (in Chinese)
- [7] C.A.阿姆巴尔楚米扬, 邬瑞锋译校. 不同模量弹性理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1986.
C.A. , Wu Ruifeng translation and checking. Elastic theory with different moduli in tension and compression [M]. Beijing: China Railway Press, 1986. (in Chinese)
- [8] 王启铜, 龚晓南, 曾国熙. 拉、压模量不同材料的球孔扩张问题[J]. 上海力学, 1993, (2): 55~63.
Wang Qitong, Gong Xiaonan, Zeng Guoxi. Expansion of granular cavity in an infinite medium with different moduli in tension and compression [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1993, (2): 55~63. (in Chinese)
- [9] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1~10.
Yu Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications [J]. Journal of Geotechnique Engineering, 1994, 16(2): 1~10. (in Chinese)
- [10] Cao L F, The C I, Chang M f. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: Theoretical analysis [J]. Geotechnique, 2001, 51(4): 323~334.
- [11] 俞茂宏, 杨松岩. 统一平面应变滑移线场理论[J]. 土木工程学报, 1997, (2): 14~26.
Yu Maohong, Yang Songyan. Liu Chungyang, Liu liangyu. Unified plane-strain slip line field theory system [J]. Journal of Civil Engineering, 1997, (2): 14~26. (in Chinese)
- [12] 龚晓南. 土塑性力学(第二版)[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999.
Gong Xiaonan. Soil plastics mechanics (second version)[M]. Hangzhou: Zhejiang Univ. Press, 1999. (in Chinese)